

Paris 1970

ORSAY
Série A, N°
N° d'ordre
592

**QUELQUES PROBLEMES THEORIQUES EN RELATION
AVEC LES MESONS VECTORIELS ET LES REACTIONS D'ANNIHILATION $e^+ e^-$**

ARTICLES PRINCIPAUX

recouvrant en partie la thèse de Doctorat ès Sciences Physiques
enregistrée au C.N.R.S. sous le Numéro AO 4125

de

Eugène CREMMER

Soutenue le 17 Février 1970 à la FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY
devant le jury :

MM. B. d'ESPAGNAT	Président
M. GOURDIN)	
J. PEREZ Y JORBA)	Examineurs
R. VINH MAU)	



Digitized by the Internet Archive
in 2026

**QUELQUES PROBLEMES THEORIQUES EN RELATION
AVEC LES MESONS VECTORIELS ET LES REACTIONS D'ANNIHILATION $e^+ e^-$**

ARTICLES PRINCIPAUX

recouvrant en partie la thèse de Doctorat ès Sciences Physiques
enregistrée au C.N.R.S. sous le Numéro AO 4125

de

Eugène CREMMER

Soutenue le 17 Février 1970 à la FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

devant le jury :

MM. B. d'ESPAGNAT

Président

M. GOURDIN)
J. PEREZ Y JORBA)
R. VINH MAU)

Examineurs

VACUUM POLARIZATION EFFECTS IN e^+e^- ANNIHILATION *

E. CREMMER and M. GOURDIN

Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Orsay, France

Received 24 March 1969

Abstract: The modifications of the photon propagator due to mesons are computed in the light of recent e^+e^- annihilation experiments and the effect on $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ and $e^+e^- \rightarrow K^0\bar{K}^0$ is estimated.

1. INTRODUCTION

In 1963 the work of Gatto [1] clearly emphasized the necessity of taking into account the modifications to the photon propagator due to hadrons in electron-positron annihilation reactions and it gave an estimate of these corrections in a pole approximation of the vector-meson resonances.

Recently, e^+e^- annihilation experiments have been performed in Novosibirsk and at Orsay. We are now in a better position to numerically compute the vacuum polarization effects.

In sect. 2, we recall the general approach of the problem and we give the relation between the hadronic modifications of the photon propagator and the total cross section for electron-positron annihilation into hadrons.

The possible models are discussed in sect. 3: First, the pole model used by Gatto and which holds for the ω meson and the φ meson with an iterative procedure, secondly, a more elaborate calculation for the ρ meson because of its large width.

The results of the calculation are presented in sect. 4 and the difference with the pole approximation is shown in a set of figures.

The best way to experimentally isolate the vacuum polarization effect from other strong interaction effects is to look at the reaction

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^- ,$$

and to compare the results after removing the radiative corrections with the predictions of pure quantum electrodynamics. Of course, we assume

* Laboratoire associé au C.N.R.S. Postal address: Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Bâtiment 211, Faculté des Sciences, 91 ORSAY, France.

* In partial fulfillment of the requirements for the degree of the Docteur d'état es Sciences Physiques, Faculté d'Orsay, Université de Paris by E. Cremmer.

the one-photon exchange approximation to be valid and no form factors to be present at the electron and muon vertices.

Events with $\mu^+\mu^-$ pairs have been seen in the Orsay experiment but in the regions of interest the annihilation cross section is dominated by the resonating mesonic states and an accurate measurement of the $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ cross section to some per cent seems to be difficult.

The simplest way to compare the theoretical prediction with experiment is to look at the mesonic final states themselves. The vacuum polarization effects are discussed in the case of $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ and $e^+e^- \rightarrow K^0\bar{K}^0$ reactions.

2. MODIFICATION TO THE PHOTON PROPAGATOR

2.1. Photon propagator structure

Let us denote by p_μ the energy momentum four-vector of a virtual photon ($p^2 + s = 0$). The photon propagator $D_{\mu\nu}(p)$ has the general structure

$$i D_{\mu\nu}(p) = \frac{g_{\mu\nu}}{s} - \left(g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{s} \right) \frac{\pi(s)}{s} \quad (1)$$

corresponding to the symbolic sum of diagrams represented on fig. 1.



Fig. 1. Vacuum polarization diagrams.

The function $\pi(s)$ possesses analytic properties leading to a Källen-Lehmann [2] representation

$$\frac{\pi(s)}{s} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } \pi(t)}{t(t-s-i\epsilon)} dt. \quad (2)$$

2.2. The spectral function

The spectral function $\text{Im } \pi(t)$ can be computed in terms of observable matrix elements of the electromagnetic current between the vacuum and a complete set of intermediate states $|n\rangle$. It is convenient to split $\pi(s)$ into its various contributions

$$\pi(s) = \sum_n \pi^{(n)}(s).$$

The spectral function associated to $\pi^{(n)}(s)$ is given [2] by

$$\text{Im } \pi^{(n)}(t) = \frac{e^2}{6t} S_n (2\pi)^4 \delta_4(p_n - p) < 0 | J_\mu^{\text{em}}(0) | n \rangle \langle n | J_\nu^{\text{em}}(0) | 0 \rangle g^{\mu\nu}, \quad (3)$$

where the symbol S_n means a summation over the polarization of the particles of the state n and a phase-space integration.

2.3. Hadronic contributions

Let us now consider the hadronic contributions to the lowest order with respect to electromagnetic interactions. The total cross section for the annihilation process

$$e^+ + e^- \rightarrow n,$$

computed in the one-photon exchange approximation, and if we take into account the gauge invariance, can be used to transform eq. (3) into [1]

$$\text{Im } \pi^{(n)}(t) = \frac{t}{4\pi\alpha} \sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow n), \quad (4)$$

and the corresponding modification of the photon propagator due to the hadronic state n takes the form

$$\pi^{(n)}(s) = \frac{s}{4\pi^2\alpha} \int_0^\infty \frac{\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow n)}{t-s-i\epsilon} dt. \quad (5)$$

For instance the spectral function associated to the intermediate state $\bar{B}B$ where B is a spinless meson is simply given by the Bouchiat-Michel formula [3]

$$\text{Im } \pi^{(\bar{B}B)}(s) = \frac{1}{12} \alpha \left(1 - \frac{4m_B^2}{t}\right)^{\frac{3}{2}} |F_B(t)|^2 \theta(t - 4m_B^2). \quad (6)$$

The hadronic contributions can be splitted into two parts depending on their isobaric spin character

$$\pi^{(I=0)}(s) = \frac{s}{4\pi^2\alpha} \int_0^\infty \frac{\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow I=0)}{9m_\pi^2} \frac{1}{t-s-i\epsilon} dt, \quad (7)$$

$$\pi^{(I=1)}(s) = \frac{s}{4\pi^2\alpha} \int_0^\infty \frac{\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow I=1)}{4m_\pi^2} \frac{1}{t-s-i\epsilon} dt, \quad (8)$$

where m_π is the π -meson mass and $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow I)$ the total cross section for e^+e^- annihilation into a final hadronic state of total isobaric spin I .

The threshold values are determined by G -parity invariance.

2.4. Annihilation cross section

The modification of the e^+e^- annihilation cross section due to vacuum polarization is the multiplication by the function

$$I(s) = |1 - \pi(s)|^2, \quad (9)$$

of the cross section calculated with the bare photon propagator $g_{\mu\nu}/s$.

The function $\pi(s)$ can be expanded in a power series of the fine structure constant α

$$\pi(s) = \sum \alpha^k \pi_{(2k)}(s) .$$

We have only even-order terms in e because of C -conservation. In the lowest order

$$I(s) \approx 1 - 2\alpha \operatorname{Re} \pi_{(2)}(s) .$$

2.5. Assumptions

The isoscalar part is computed using a vector meson dominance model and taking into account the contributions from the ω and φ mesons.

For the isovector part we assume the $I=1$ hadronic system to be dominated, in the region of interest, by the $\pi^+\pi^- P$ wave neglecting other non-resonating states.

3. MODELS FOR $\pi(s)$

3.1. Isoscalar function $\pi^{I=0}(s)$

We first consider the isoscalar part of $\pi(s)$. We assume the total cross section $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow I=0)$ to be given, in a first approximation as the sum of two Breit-Wigner formulae, one for the ω meson and one for the φ meson. Using

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow V \rightarrow I=0) \approx 12\pi \frac{\Gamma(V \rightarrow e^+e^-)}{m_V} \frac{m_V \Gamma_V}{(m_V^2 - t)^2 + m_V^2 \Gamma_V^2} \quad (V = \omega, \varphi) , \quad (10)$$

the function $\pi^{I=0}(s)$ is given from the representation (7) by

$$\pi^{I=0}(s) \approx \frac{3s}{\alpha} \sum_{V=\omega, \varphi} \frac{\Gamma(V \rightarrow e^+e^-)}{m_V} Z_V(s) ,$$

where the integral $Z_V(s)$ defined by

$$Z_V(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_V \Gamma_V}{9m_\pi^2 (t - m_V^2)^2 + m_V^2 \Gamma_V^2} \frac{dt}{t - s - i\epsilon} ,$$

is easily computed, in the narrow-width approximation to be

$$Z_V(s) = \frac{1}{m_V^2 - s - i m_V \Gamma_V} .$$

The final result is simply [1]

$$\pi^{I=0}(s) \approx \frac{3s}{\alpha} \sum_{V=\omega, \varphi} \frac{\Gamma(V \rightarrow e^+e^-)}{m_V} \frac{1}{m_V - s - im_V \Gamma_V}. \quad (11)$$

The isoscalar vector-meson contributions to the factor $I(s)$ defined in eq. (9) takes the form, in the second-order approximation

$$I_V(s) = -2 \operatorname{Re} \pi^{(V)}(s) = \frac{6s}{\alpha} \frac{\Gamma(V \rightarrow e^+e^-)}{m_V} \frac{s - m_V^2}{(m_V^2 - s)^2 + m_V^2 \Gamma_V^2}. \quad (12)$$

The contribution I_V of the vector meson $V(\omega, \varphi)$ is zero at $s = m_V^2$ and has its extremal values for $s = s_V^\pm \equiv m_V^2 \pm m_V \Gamma_V$ where [1] it is

$$I_V(s_V^\pm) = \pm \frac{3}{\alpha} \frac{\Gamma(V \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma_V}. \quad (13)$$

The ω contribution is estimated using the results of the Orsay experiment [4]

$$\frac{\Gamma(\omega \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma_\omega} = (0.76 \pm 0.14) \times 10^{-4},$$

and we obtain

$$I_\omega(s_\omega^\pm) = \pm (3.1 \pm 0.6) \times 10^{-2}. \quad (14)$$

Proceeding in the same way for the φ meson, from the Orsay data [5]

$$\frac{\Gamma(\varphi \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma_\varphi} = (3.96 \pm 0.6) \times 10^{-2},$$

we obtain

$$I_\varphi(s_\varphi^\pm) = \pm (16.3 \pm 2.5) \times 10^{-2}. \quad (15)$$

It is clear from eqs. (14) and (15) that the ω meson contribution is small whereas the φ meson contribution is large. Therefore the approximation (11) is certainly justified for the ω -meson part but we must perhaps be more circumspect concerning the φ -meson part. For this reason, we have considered possible corrections to the peak approximation of the φ -meson contribution.

3.2. Corrections to the φ meson

For the φ meson decaying into a $K\bar{K}$ system the available phase space is small and the momentum dependence of the total cross section $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow K\bar{K})$ can be a priori important.

We have computed the $K\bar{K}$ contributions to the spectral function $\pi(s)$

using the Bouchiat-Michel spectral function (6) and a simple Breit-Wigner formula for the K-meson electromagnetic form factor

$$\pi(K^a K^a)(s) = \frac{3s}{\alpha} \frac{\Gamma(\varphi \rightarrow e^+ e^-)}{m_\varphi} \frac{\Gamma(\varphi \rightarrow K^a \bar{K}^a)}{\Gamma_\varphi} Z_\varphi(s), \quad (1)$$

where K^a is either K^0 or K^+ .

The function $Z_\varphi(s)$ is now defined by the integral

$$Z_\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \int_{4m_a^2}^{\infty} \frac{m_\varphi^2}{t} \frac{\left(1 - \frac{4m_a^2}{t}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{4m_a^2}{m_\varphi^2}\right)} \frac{m_\varphi \Gamma_\varphi}{(t - m_\varphi^2)^2 + m_\varphi^2 \Gamma_\varphi^2} \frac{dt}{t - s - i\epsilon}, \quad (1')$$

where m_a is the K^a meson mass.

The complex function $Z_\varphi(s)$ has been analytically computed in the appendix but a numerical estimate of the momentum corrections to the peak approximation (12) remains always very small and of the order or less than 6×10^{-4} .

The form (12) of $I_\varphi(s)$ corresponds to a second-order approximation with respect to electromagnetic interactions. The maximum value (15) reached by $I_\varphi(s)$ makes plausible higher order contributions to be of some per cent.

It is relatively straightforward to sum all the diagrams corresponding to the iteration of the second-order contributions and represented on fig. 2



Fig. 2. Iteration of the second-order contribution.

The result is simply

$$\pi_{(2)}(s) \rightarrow \frac{\pi_2(s)}{1 + \pi_2(s)},$$

and the corresponding change for $I(s)$ is

$$-2 \operatorname{Re} \pi^{(\varphi)}(s) \rightarrow \frac{1}{|1 + \pi^{(\varphi)}(s)|^2} - 1, \quad (18)$$

where $\pi^{(\varphi)}(s)$ is taken in the peak approximation (12) or in the more sophisticated form (16).

For diagrams which are typically of the fourth order like that represented on fig. 3 and where a virtual photon is exchanged between the charged K mesons of the intermediate hadronic state, an estimate can be

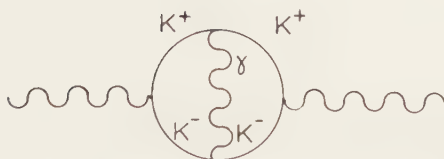


Fig. 3. A typical fourth-order diagram.

made using the results of a recent calculation of the radiative corrections to $\varphi \rightarrow K\bar{K}$ decay [6]. Around the φ meson mass, the value of $\pi_{\text{r.c.}}(s)$ including the radiative corrections can be related to the second order expression $\pi_{(2)}(s)$ by

$$\pi_{\text{r.c.}}(K^+K^-)(s) \approx \frac{g_+}{g_0} \pi_2(K^+K^-)(s), \quad (19)$$

where g_+ and g_0 are the coupling constants for $\varphi \rightarrow K^+K^-$ decay, with and without radiative corrections. From ref. [6]:

$$\frac{g_+}{g_0} \approx 1.021. \quad (20)$$

3.3. Isovector function $\pi^{I=1}(s)$

A first crude calculation of the isovector part of $\pi(s)$ can be made using the peak approximation (11) for the ρ meson contribution. The corresponding contribution to $I(s)$ is given by the expression (12) and the numerical estimate of the maximum value (13) of $I_\rho(s)$ is obtained using the results of the Orsay experiment [7]

$$\frac{\Gamma(\rho \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma_\rho} = (6.63 \pm 0.85) \times 10^{-5}.$$

It follows:

$$I_\rho(s_\rho^\pm) = \pm (2.72 \pm 0.35) \times 10^{-2}. \quad (21)$$

The narrow width approximation is not valid for the ρ meson and we have assumed the hadronic $I=1$ state to be dominated by the $\pi^+\pi^-$ system in the P wave. The total cross section $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow I=1)$ in eq. (8) is replaced by $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)$

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-) = \frac{1}{3} \pi \alpha^2 \frac{1}{s} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{\frac{3}{2}} |F_\pi(s)|^2,$$

where $F_\pi(s)$ is the π meson electromagnetic form factor.

We have computed the integral:

$$\pi^{I=1}(s) \approx \frac{\alpha}{12\pi} s \int_{4m_\pi^2}^s \frac{\left(1 - \frac{4m_\pi^2}{t}\right)^{\frac{3}{2}}}{t} |F_\pi(t)|^2 \frac{dt}{t-s-i\epsilon}, \quad (22)$$

using, for $F_\pi(t)$, the model proposed by Gounaris and Sakurai [8] and which fits very well the Orsay results [7] with the ρ meson parameters

$$m_\rho = 770 \pm 4 \text{ MeV}, \quad \Gamma_\rho = 111 \pm 6 \text{ MeV}.$$

4. RESULTS

The function $I(s)$ is computed in the following model

$$I(s) = \frac{1}{|1 + \pi^\omega(s)|^2} - 2 \operatorname{Re} \pi^{I=1}(s) - 2 \operatorname{Re} \pi^\omega(s),$$

where we have used:

- (a) for the ω meson, the peak expression (12),
- (b) for the φ meson, the iterated form (18),
- (c) for the ρ meson, the integral (22).

An overall estimate of 15% can be made for the errors on $I(s)$ only due to experiments.

The results of the calculation are presented on figs. 4, 5 and 6 and compared with the peak approximation generally used.

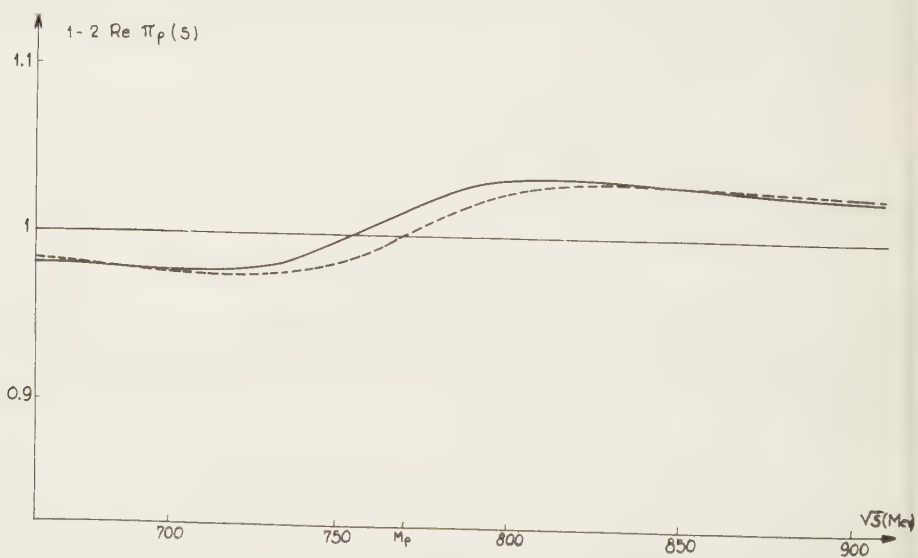


Fig. 4. The ρ meson contribution; ---- the peak approximation; — the integrated form.

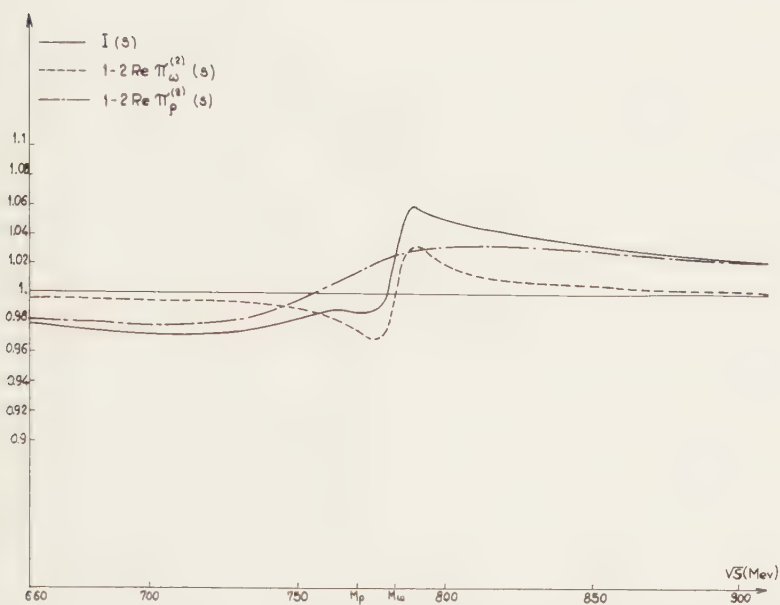


Fig. 5. The ρ - ω region. — · — ρ meson contribution; --- ω meson contribution; — $I(s)$ total.

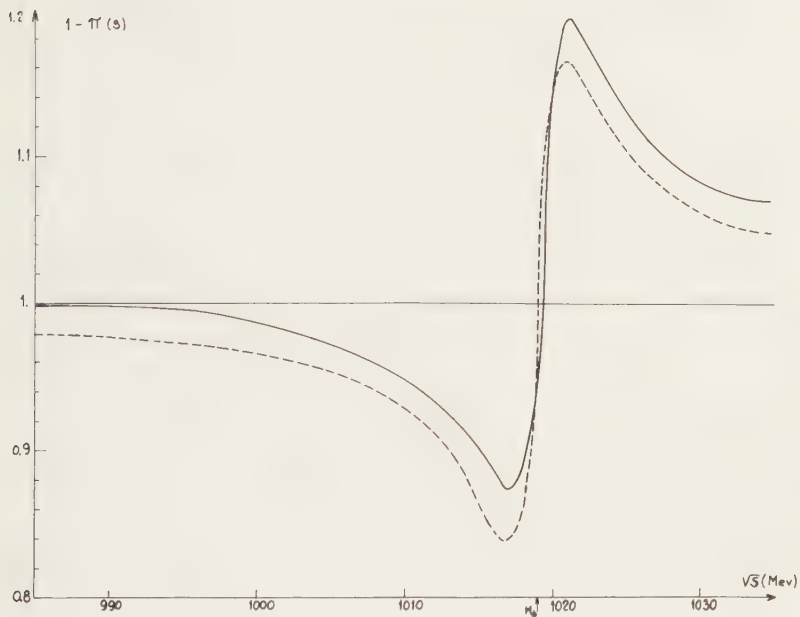


Fig. 6. The ϕ meson contribution. ---- The peak approximation. — $I(s)$ total.

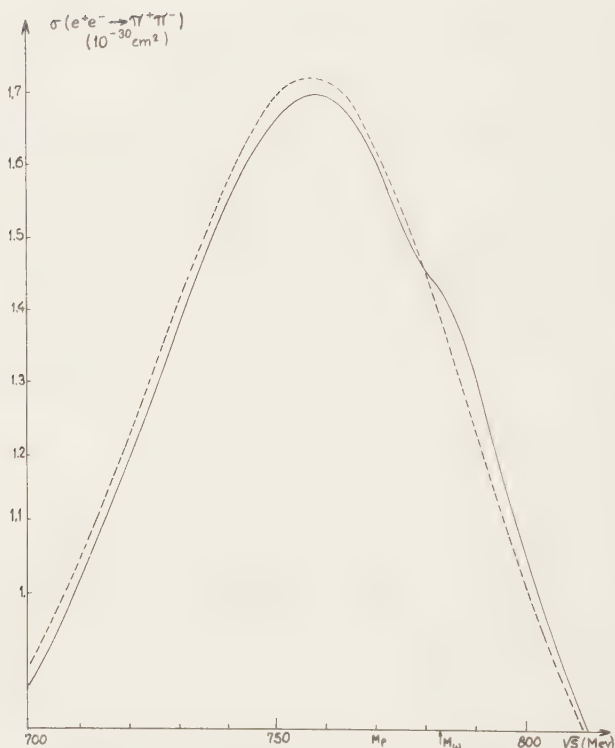


Fig. 7. The total cross section $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)$. ----- without vacuum polarization, ——— with vacuum polarization.

On figs. 7 and 8 we have plotted the total cross sections $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)$ and $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow K^0\bar{K}^0)$ using the parameters determined by the Orsay experiments. The two curves represented on each figure are with and without the vacuum polarization factor $I(s)$.

Of course, to extract from experiment the various resonance parameters like m_V and Γ_V , we must compare the experimental cross sections with the theoretical one, including the vacuum polarization factor $I(s)$ and the radiative corrections, also functions of the same parameters.

The fig. 7 exhibits close to meson mass an interference type effect due to a zero of $\text{Re } \pi(s)$ at $\sqrt{s} \approx 780$ MeV. In this region both the ρ and ω mesons contribute to $\pi(s)$ and cancel at this point.

Let us notice that we take into account, in a partial way, the electromagnetic decay of the ω meson into a $\pi^+\pi^-$ system.

The fig. 8 shows that in the ϕ meson region the total cross section $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow K^0\bar{K}^0)$ is essentially shifted towards the right by the vacuum polarization factor $I(s)$.



Fig. 8. The total cross section $\sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow K^0\bar{K}^0)$. ---- without vacuum polarization; ——— with vacuum polarization.

APPENDIX

Calculation of $Z_\varphi(s)$

The function $Z_\varphi(s)$ is defined by the integral (17)

$$Z_\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{4m_a^2}{a}}^{\infty} \frac{m_\varphi^2}{t} \frac{\left(1 - \frac{4m_a^2}{t}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{4m_a^2}{2m_\varphi^2}\right)} \frac{m_\varphi \Gamma_\varphi}{(t - m_\varphi^2)^2 + m_\varphi^2 \Gamma_\varphi^2} \frac{dt}{t - s - i\epsilon}.$$

An analytic calculation can be performed and the result is:

$$\begin{aligned}
 Z_{\varphi}(s) = & \frac{m_{\varphi}^2 - s}{(m_{\varphi}^2 - s)^2 + m_{\varphi}^2 \Gamma_{\varphi}^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_{\varphi}}{m_{\varphi} \left(1 - \frac{4m_a^2}{m_{\varphi}^2}\right)} \left\{ \frac{m_{\varphi}^2}{(m_{\varphi}^2 - s)^2 + m_{\varphi}^2 \Gamma_{\varphi}^2} \right. \\
 & \left[z_a(s) - z_a(m_{\varphi}^2) - (s - m_{\varphi}^2) z_a'(m_{\varphi}^2) + i\pi \frac{m_{\varphi}^2}{s} \left(1 - \frac{4m_a^2}{s}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \\
 & \left. + \frac{1}{s} \left[\frac{4}{3} - \frac{4m_{\varphi}^2}{s} - \frac{8m_a^2}{m_{\varphi}^2} \right] \right\} + O\left(\frac{\Gamma_{\varphi}^2}{m_{\varphi}^2}\right), \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

where the function $z_a(s)$ is defined by:

$$z_a(s) = \frac{m_{\varphi}^2}{s} \left(1 - \frac{4m_a^2}{s}\right)^{\frac{3}{2}} \log \frac{1 - \left(1 - \frac{4m_a^2}{s}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left(1 - \frac{4m_a^2}{s}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

In the second order electromagnetic approximation, $\text{Re } Z_{\varphi}(s)$ is the interesting quantity. The first term in eq. (A.1) is the value of $\text{Re } Z_{\varphi}(s)$ as given by the peak approximation (see eq. (12)). The other terms are the momentum corrections calculated at first order in $\Gamma_{\varphi}/m_{\varphi}$. It is clear that the coefficient of the resonating term in the bracket

$$z_a(s) - z_a(m_{\varphi}^2) - (s - m_{\varphi}^2) z_a'(m_{\varphi}^2)$$

behaves like $(s - m_{\varphi}^2)^2$ in the neighbourhood of the φ meson peak and therefore the momentum corrections remain always very small and of the order of less than 6×10^{-4} .

REFERENCES

- [1] R. Gatto, Nuovo Cimento 28 (1963) 658.
- [2] G. Kallen, Helv. Phys. Acta 25 (1952) 417;
H. Lehmann, Nuovo Cimento 11 (1954) 342.
- [3] C. Bouchiat and L. Michel, Journ. de Phys. 22 (1961) 121.
- [4] J. A. Augustin et al., Phys. Letters 28B (1969) 513.
- [5] J. A. Augustin et al., Phys. Letters 28B (1969) 517.
- [6] E. Cremmer and M. Gourdin, Nucl. Phys. B9 (1969) 451.
- [7] J. A. Augustin et al., Phys. Letters 28B (1969) 508.
- [8] G. Gounaris and J. J. Sakurai, Phys. Rev. Letters 21 (1968) 244.

CASSURE DE SYMETRIE EN ALGEBRE DES COURANTS

APPLICATION AU MELANGE $\omega - \phi$

INTRODUCTION

Dans les dernières années, plusieurs modèles de mésons vecteurs basés sur la dominance des mésons vecteurs pour les courants vectoriels^{[1][2]} ont été proposés. Ils diffèrent par la cassure de $SU(3)$. Deux modèles, ceux de DAS-MATHUR-OKUBO^[3] et OAKES-SAKURAI^[4] respectent les lois de commutation proposées par GELL MANN^[5] pour une composante de temps et une d'espace des courants, mais sont inconsistents avec un modèle "mass mixing" pour le système $\omega - \Phi$. Plus récemment SUGAWARA^[6] a proposé une théorie des courants avec symétrie brisée et avec de nouvelles lois de commutation à temps égaux et a conclu que son modèle était consistant avec le modèle "mass mixing" pour $\omega - \Phi$. Tous ces modèles prédisent les taux de désintégration des mésons vectoriels neutres (ρ , ω , Φ) en e^+e^- .

Récemment, des expériences d'annihilation e^+e^- ont été réalisées à ORSAY (ACO) et ont donné des résultats relativement précis pour les taux de désintégration de ρ , ω , Φ en e^+e^- . La comparaison avec les différents modèles théoriques semble favoriser les prédictions de SUGAWARA^{[7][8]}.

Cependant, récemment KIMEL^{[9][10]}, en utilisant l'identité de Jacobi, a montré qu'une triviale extension du modèle de SUGAWARA pour inclure le courant baryonique était incompatible avec le modèle "mass mixing" pour $\omega - \Phi$. Il semble donc intéressant d'étudier de façon générale les implications de l'identité de Jacobi et de trouver un modèle compatible avec le "mass mixing" $\omega - \Phi$.

Dans une première partie, nous donnons quelques rappels sur les fonctions spectrales et leur lien avec les sections efficaces d'annihilation e^+e^- dans le cas du courant électromagnétique. Nous y donnerons la définition des constantes de couplage γ -méson vecteur et les résultats expérimentaux. On explicitera de façon simple les fonctions spectrales dans l'approximation de saturation par les mésons vecteurs.

La deuxième partie est consacrée à l'étude générale des lois de commutation d'une composante de temps et d'une d'espace en supposant que l'algèbre des charges est conservée et que les termes de Schwinger sont des nombres. En

utilisant l'invariance de Lorentz et plus précisément le commutateur à temps égaux de la composante 0-0 du tenseur énergie impulsion et d'une composante de courant, on déduira la forme générale des commutateurs $[\partial^\mu V_\mu^a(x), V_b^0(y)]_{x^0=y^0}$; $[\partial^\mu V_\mu^a(x), V_b^i(y)]_{x^0=y^0}$ et $[\partial^0 V_a^i(x) - \partial^i V_a^0(x), V_b^j(y)]_{x^0=y^0}$. On en déduira des contraintes dans le cas des courants conservés : une composante de temps d'un courant conservé doit satisfaire aux lois de commutation de GELL MANN. On montrera enfin que l'hypothèse P.C.V.C. forte n'est compatible qu'avec les lois de commutation de GELL MANN. En dernier lieu, moyennant deux hypothèses supplémentaires nous serons en mesure d'établir une généralisation de la 2ème règle de somme de Weinberg^[11] et d'en déduire que toute la cassure de symétrie se manifeste alors seulement dans les masses et par un mélange des différentes composantes SU(3) et que les constantes de couplage définies dans la première partie sont invariantes par SU(3).

Nous étudierons dans la troisième partie la cassure de symétrie dans le cadre de l'algèbre des champs développée par LEE, WEINBERG et ZUMINO^[12]. Nous montrerons que les résultats obtenus dans la première partie correspondent à un lagrangien avec termes cinétiques invariants par SU(3), les termes de masse contenant la cassure de symétrie. Au contraire les lois de commutation de GELL MANN sont respectées si les termes de masse sont invariants, la cassure étant dans les termes cinétiques.

Nous généraliserons la théorie des courants proposée par SUGAWARA, dans une quatrième partie. Pour cela, nous construirons un tenseur énergie impulsion fonction de courants satisfaisant aux lois de commutation données dans la première partie de façon à satisfaire à l'invariance de Lorentz, c'est-à-dire aux lois de transformation des courants par le groupe de Poincaré et à l'algèbre du groupe de Poincaré. Les commutateurs étudiés dans la première partie sont ici explicitement connus et montreront que l'interprétation physique d'une telle théorie n'est pas claire et qu'il y a des contradictions qui semblent difficiles à résoudre.

Nous reviendrons enfin dans la cinquième partie à des réalités plus physiques en considérant plus spécialement le cas où l'isospin, l'hypercharge et le nombre baryonique sont conservés. Nous étudierons les différents modèles trouvés dans les parties précédentes (2 et 3). Nous retrouverons les résultats

de DAS-MATHUR-OKUBO, OAKES-SAKURAI, SUGAWARA et ceux d'un type de modèles considéré par GOURDIN^[8]. Nous donnerons les résultats numériques et leur comparaison avec l'expérience. Nous ferons finalement quelques remarques sur le modèle donnant les résultats de SUGAWARA qui sont les mieux en accord avec l'expérience.

REPRESENTATION SPECTRALE

Cette partie est consacrée à une série de rappels sur les fonctions spectrales et leur lien avec les sections efficaces d'annihilation e^+e^- dans le cas du courant électromagnétique. Elle a essentiellement pour but de préciser nos notations. Dans tout ce qui suit, on utilisera la métrique (+ - - -).

1 - Fonctions spectrales

Les fonctions spectrales $\rho_1^{\alpha\beta}(m^2)$ et $\rho_0^{\alpha\beta}(m^2)$ sont définies à partir de la représentation de KALLEN-LEHMAN^{[13][14]} de la valeur moyenne dans le vide du produit de deux courants $J_\mu^\alpha(x)$ et $J_\nu^\beta(0)$:

$$\langle 0 | J_\mu^\alpha(x) J_\nu^\beta(0) | 0 \rangle = - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d_4k e^{-ik \cdot x} \theta(k_0) [\rho_1^{\alpha\beta}(k^2) (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) - k_\mu k_\nu \rho_0^{\alpha\beta}(k^2)] \quad (I.1)$$

La relation précédente est équivalente à :

$$2\pi \theta(k_0) [(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \rho_1^{\alpha\beta}(k^2) - k_\mu k_\nu \rho_0^{\alpha\beta}(k^2)] = - \sum_n (2\pi)^4 \delta_4(k - p_n) \quad (I.2)$$

$$\langle 0 | J_\mu^\alpha(0) | n \rangle \langle n | J_\nu^\beta(0) | 0 \rangle$$

où $\sum_n$ désigne une sommation sur les états intermédiaires y compris les polarisations et l'intégration sur l'espace des phases. On montre alors facilement que dans le système du centre de masse ($\vec{k} = 0$)

$$\theta(k_0) \rho_1^{\alpha\beta}(k^2) = - \frac{1}{6\pi} \sum_n (2\pi)^4 \delta_4(k - p_n) \langle 0 | J_i^\alpha(0) | n \rangle \langle n | J_i^\beta(0) | 0 \rangle \quad (I.3)$$

$$\theta(k_0) \rho_0^{\alpha\beta}(k^2) = \frac{1}{2\pi k^2} \sum_n (2\pi)^4 \delta_4(k - p_n) \langle 0 | J_0^\alpha(0) | n \rangle \langle n | J_0^\beta(0) | 0 \rangle \quad (I.4)$$

On a alors les propriétés suivantes

$$(a) \quad \partial^\mu J_\mu^\alpha(x) = 0 \Rightarrow \rho_0^{\alpha\beta}(k^2) = 0 \quad (\text{on suppose qu'il n'y a pas de terme en } \delta(k^2))$$

$$(b) \quad J_\mu^\alpha \text{ hermitique} \Rightarrow \rho_1^{\alpha\alpha}(k^2) \geq 0 \text{ et } \rho_0^{\alpha\alpha}(k^2) \geq 0 \quad \rho_{1,0}^{\alpha\beta} = (\rho_{1,0}^{\alpha\beta})^+$$

On suppose dans la suite $\rho^{\alpha\beta}$ réelle, donc symétrique. A partir de la représentation (1) on trouve aisément les valeurs moyennes dans le vide de certains commutateurs à temps égaux en particulier^{[15][16]}

$$\langle 0 | [J_0^\alpha(x), J_i^\beta(0)]_{x_0=0} | 0 \rangle = i \partial_i \delta_3(\vec{x}) \int_0^\infty dm^2 \left(\frac{\rho_1^{\alpha\beta}(m^2)}{m^2} + \rho_0^{\alpha\beta}(m^2) \right) \equiv i \partial_i \delta_3(\vec{x}) S^{\alpha\beta} \quad (I.5)$$

$$\langle 0 | [\partial_0 J_i^\alpha(x) - \partial_i J_0^\alpha(x), J_j^\beta(0)]_{x_0=0} | 0 \rangle = i g_{ij} \delta_3(\vec{x}) \int_0^\infty dm^2 \rho_1^{\alpha\beta}(m^2) \equiv i g_{ij} \delta_3(\vec{x}) C^{\alpha\beta} \quad (I.6)$$

$$\langle 0 | [\partial^\mu J_\mu^\alpha(x), J_0^\beta(0)]_{x_0=0} | 0 \rangle = -i \delta_3(\vec{x}) \int_0^\infty dm^2 m^2 \rho_0^{\alpha\beta}(m^2) \quad (I.7)$$

$$\langle 0 | [J_i^\alpha(x), J_j^\beta(0)]_{x_0=0} | 0 \rangle = \langle 0 | [J_0^\alpha(x), J_0^\beta(0)]_{x_0=0} | 0 \rangle = 0 \quad (I.8)$$

$$\langle 0 | [\partial^\mu J_\mu^\alpha(x), J_i^\beta(0)]_{x_0=0} | 0 \rangle = 0$$

Il est également utile d'avoir la représentation spectrale du propagateur

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k) &\equiv i \int d_4k e^{ik \cdot x} \langle 0 | T(J_\mu^\alpha(x) J_\nu^\beta(0)) | 0 \rangle \\ &= \int_0^\infty \frac{dm^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left[\rho_1^{\alpha\beta}(m^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right) - \rho_0^{\alpha\beta}(m^2) k_\mu k_\nu \right] \\ &\quad + g_{\mu 0} g_{\nu 0} \int_0^\infty dm^2 \left(\frac{\rho_1^{\alpha\beta}(m^2)}{m^2} + \rho_0^{\alpha\beta}(m^2) \right) \end{aligned} \quad (I.9)$$

2 - Courant électromagnétique

Le courant électromagnétique est un courant conservé. Dans le cadre de la symétrie SU(3) il est la somme de deux courants conservés

$$J_{\mu}^{\text{em}}(x) = J_{\mu}^3(x) + \frac{1}{\sqrt{3}} J_{\mu}^8(x)$$

Les fonctions spectrales $\rho_0^{33}(m^2)$ et $\rho_0^{88}(m^2)$ sont nulles et on a :

$$\rho^{\text{em}}(m^2) = \rho_1^{33}(m^2) + \frac{1}{3} \rho_1^{88}(m^2) \quad (\text{I.10})$$

A l'ordre le plus bas en interaction électromagnétique il n'y a pas de mixing entre les composantes 3 et 8.

Dans l'approximation d'échange d'un photon on peut relier $\rho^{\text{em}}(s)$ à la section efficace d'annihilation e^+e^- par ^{[17][18]}

$$\rho^{\text{em}}(s) = \frac{s^2}{16\pi \alpha^2} \sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}) \quad (\text{I.11})$$

de même, en séparant les états finals par rapport à l'isospin, on a

$$\rho^{33}(s) = \frac{s^2}{16\pi \alpha^2} \sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow I=1) \quad (\text{I.12})$$

$$\rho^{88}(s) = \frac{3s^2}{16\pi \alpha^2} \sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow I=0) \quad (\text{I.13})$$

On peut alors écrire les quantités $C^{\alpha\alpha}$ et $S^{\alpha\alpha}$ définies précédemment pour $\alpha = 3$ et 8 en fonction des sections efficaces par :

$$S^{33} = \frac{1}{16\pi \alpha^2} \int_{4m_{\pi}^2}^{\infty} s \sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow I=1) ds \quad (\text{I.14})$$

$$S^{88} = \frac{3}{16\pi \alpha^2} \int_{9m_{\pi}^2}^{\infty} s \sigma_{\text{tot}}(e^+e^- \rightarrow I=0) ds \quad (\text{I.15})$$

$$C^{33} = \frac{1}{16\pi\alpha^2} \int_{4m_\pi^2}^{\infty} s^2 \sigma_{\text{tot}}(e^+ e^- \rightarrow I=1) ds \quad (\text{I.16})$$

$$C^{88} = \frac{3}{16\pi\alpha^2} \int_{9m_\pi^2}^{\infty} s^2 \sigma_{\text{tot}}(e^+ e^- \rightarrow I=0) ds \quad (\text{I.17})$$

3 - Modèle de dominance de mésons vecteurs - Désintégrations leptoniques des mésons vecteurs

Soit une réaction $e^+ e^- \rightarrow f$ de seuil sf . Si un méson vecteur (ρ , ω , Φ) peut se désintégrer en f , la réaction $e^+ e^- \rightarrow f$ est dominée au voisinage de $s \simeq m_V^2 > sf$ par la chaîne $e^+ e^- \rightarrow V \rightarrow f$, et on a en particulier

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+ e^- \rightarrow f) \Big|_{s=m_V^2} = \frac{12\pi}{m_V^2} \frac{\Gamma(V \rightarrow e^+ e^-)}{\Gamma_V} \frac{\Gamma(V \rightarrow f)}{\Gamma_V} \quad (\text{I.18})$$

(a) Partie isoscalaire - Contributions de ω et Φ

ω et Φ sont des résonances de faible largeur. Du fait de leur grande différence de masse, l'interférence entre ω et Φ est négligeable. On peut alors représenter $\sigma_{\text{tot}}(e^+ e^- \rightarrow I=0)$ par la somme de 2 Breit et Wigner et faire l'approximation de largeur nulle dans les calculs. On obtient facilement

$$S^{88} = \frac{9}{4\pi\alpha^2} (m_\omega \Gamma(\omega \rightarrow e^+ e^-) + m_\Phi \Gamma(\Phi \rightarrow e^+ e^-)) \quad (\text{I.19})$$

$$C^{88} = \frac{9}{4\pi\alpha^2} \left(\frac{\Gamma(\omega \rightarrow e^+ e^-)}{m_\omega} + \frac{\Gamma(\Phi \rightarrow e^+ e^-)}{m_\Phi} \right) \quad (\text{I.20})$$

(b) Partie isovectorielle - Contribution du ρ

L'approximation de largeur nulle n'est plus valable. On fait l'hypothèse que $\sigma_{\text{tot}}(e^+ e^- \rightarrow I=1)$ est dominée par les contributions $\pi^+ \pi^-$ soit

$$\sigma_{\text{tot}}(e^+ e^- \rightarrow I=1) \simeq \frac{\pi\alpha^2}{3} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{s}\right)^{3/2} |F_\pi(s)|^2 \quad (\text{I.21})$$

En utilisant le facteur de forme électromagnétique du pion $F_\pi(s)$ proposé par GOUNARIS et SAKURAI^{[19][20]}, on obtient les formes approchées

$$S^{33} \simeq \frac{3}{4\pi\alpha^2} \frac{m_\rho \Gamma(\rho \rightarrow e^+e^-)}{d\Gamma \left(1 + \frac{\rho}{m_\rho}\right)} \quad (I.22)$$

$$C^{33} \simeq \frac{3}{4\pi\alpha^2} \frac{\Gamma(\rho \rightarrow e^+e^-)}{m_\rho \left(1 + \frac{\rho}{m_\rho}\right)} \quad (I.23)$$

où d est facteur de m_π^2 et m_ρ^2 et vaut 0.48 et varie légèrement avec les règles de somme considérées (S^{33} , C^{33} ...). On négligera cette variation dans la suite.

(c) Désintégrations leptoniques des mésons vecteurs

Définissons

$$\begin{aligned} \langle 0 | V_\mu^3(0) | \rho \rangle &= -\frac{m_\rho^2}{f_\rho} \epsilon_\mu \\ \langle 0 | V_\mu^8(0) | \omega \rangle &= -\sqrt{3} \frac{m_\omega^2}{f_\omega} \epsilon_\mu \\ \langle 0 | V_\mu^8(0) | \Phi \rangle &= -\sqrt{3} \frac{m_\Phi^2}{f_\Phi} \epsilon_\mu \end{aligned} \quad (I.24)$$

Le taux de désintégration en e^+e^- est alors donné à des termes en m_e^4/m_V^4 par^[1]

$$\Gamma(V \rightarrow e^+e^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \frac{m_V}{f_V^2} \quad (I.25)$$

on obtient alors

$$S^{88} = 3\left(\frac{m_\omega^2}{f_\omega^2} + \frac{m_\Phi^2}{f_\Phi^2}\right) \quad S^{33} = \frac{m_\rho^2}{f_\rho^2 \left(1 + \frac{\rho}{m_\rho}\right)} \quad (I.26)$$

$$\text{On définit } f_\rho \text{ par } S^{33} = m_\rho^2 / f_\rho^2 \quad (I.27)$$

on obtient alors

$$f_{\rho} = \bar{f}_{\rho} \left(1 + \frac{d\Gamma_{\rho}}{m_{\rho}}\right)^{\frac{1}{2}} = \bar{g}_{\rho\pi\pi} \left(1 + \frac{d\Gamma_{\rho}}{m_{\rho}}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (I.28)$$

(à part ce facteur, on traite le méson ρ comme s'il était stable).

f_Y et θ_Y sont définis à partir de f_{ω} et f_{Φ} par

$$f_{\omega} = \frac{2f_Y}{\sin\theta_Y} \quad f_{\Phi} = -\frac{2f_Y}{\cos\theta_Y} \quad (I.29)$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} S^{33} &= \frac{m_{\rho}^2}{f_{\rho}^2} & S^{88} &= \frac{3}{4f_Y^2} (m_{\Phi}^2 \cos^2\theta_Y + m_{\omega}^2 \sin^2\theta_Y) \\ C^{33} &= \frac{m_{\rho}^4}{f_{\rho}^2} & C^{88} &= \frac{3}{4f_Y^2} (m_{\Phi}^4 \cos^2\theta_Y + m_{\omega}^4 \sin^2\theta_Y) \end{aligned} \quad (I.30)$$

(d) Résultats expérimentaux

Les récentes expériences d'annihilation e^+e^- à l'ACO ont donné les résultats suivants [7]

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho \rightarrow e^+e^-) &= (7,36 \pm 0,7) \text{ keV} \\ \Gamma(\omega \rightarrow e^+e^-) &= (0,94 \pm 0,18) \text{ keV} \\ \Gamma(\Phi \rightarrow e^+e^-) &= (1,67 \pm 0,25) \text{ keV} \end{aligned} \quad (I.31)$$

d'où on tire

$$\frac{f_{\rho}^2}{4\pi} = 1,99 \pm 0,10 \quad \frac{4f_Y^2}{3} = 2,11 \pm 0,24 \quad (I.32)$$

$$\text{tg } \theta_Y = 0,863 \pm 0,108$$

4 - Expression matricielle des fonctions spectrales

Nous considérons ici les fonctions spectrales $\rho^{\alpha\beta}(m^2)$ dans le cas où on sature les expressions du type $\int \rho^{\alpha\beta}(m^2) m^{2p} dm^2$ par les neuf mésons vecteurs seulement. Le vecteur de polarisation $\epsilon_\mu(P, \lambda)$ vérifiant $P^\mu \epsilon_\mu = 0$ on voit immédiatement que les fonctions spectrales $\rho_0(m^2)$ sont nulles dans cette approximation. Ici α va de 0 à 8.

On désigne par Φ_R^α les mésons vecteurs physiques de masse m_α et on définit la matrice G_R^{-1} par

$$\langle 0 | V_\mu^\alpha(0) | \Phi_R^\gamma \rangle = - (G_R^{-1})_{\alpha\gamma} m_\gamma^2 \epsilon_\mu = - (G_R^{-1} M_R^2)_{\alpha\gamma} \epsilon_\mu \quad (I.33)$$

On obtient alors pour les fonctions spectrales

$$\begin{aligned} \rho_0^{\alpha\beta}(m^2) &= 0 \\ \rho_1^{\alpha\beta}(m^2) &= \sum_{\gamma=0}^8 (G_R^{-1} M_R^2)_{\alpha\gamma} \delta(m^2 - m_\gamma^2) (M_R^2 \tilde{G}_R^{-1})_{\gamma\beta} \end{aligned} \quad (I.34)$$

d'où

$$\int \rho_1^{\alpha\beta}(m^2) m^{2p} dm^2 = (G_R^{-1} M_R^{2(p+2)} \tilde{G}_R^{-1})_{\alpha\beta} \quad (I.35)$$

en particulier, on a

$$S_{\alpha\beta} = (G_R^{-1} M_R^2 \tilde{G}_R^{-1})_{\alpha\beta} \quad (I.36)$$

$$C_{\alpha\beta} = (G_R^{-1} M_R^4 \tilde{G}_R^{-1})_{\alpha\beta} \quad (I.37)$$

II. ALGÈBRE DES COURANTS ET CASSURE DE LA SYMÉTRIE SU(3)

Nous étudions ici quelques propriétés de l'algèbre des courants qui conserve l'algèbre des charges.

1 - Forme générale des lois de commutations

(a) Nous considérons neuf courants $V_a^\mu(x)$ et partons des lois de commutations suivantes

$$\begin{aligned}
[V_a^0(x), V_b^0(y)]_{x^0=y^0} &= i f_{abc} V_c^0(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \\
[V_a^0(x), V_b^i(y)]_{x^0=y^0} &= i P_{abc} V_c^i(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) + i S_{ab} \partial^i \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \\
[V_a^i(x), V_b^j(y)]_{x^0=y^0} &= 0
\end{aligned}
\tag{II.1}$$

où les f_{abc} sont les constantes de structure de SU(3) si aucun indice n'est nul et $f_{abc} = 0$ si un indice est nul.

Les P_{abc} sont des nombres que nous nous proposons d'étudier.

Les S_{ab} sont les termes de Schwinger qu'on suppose être des c-nombres donc symétriques.

On définit les matrices 9×9 F_a et P_a par

$$(F_a)_{bc} = f_{abc} ; \quad (P_a)_{bc} = P_{abc} \tag{II.2}$$

Ecrivons maintenant l'identité de Jacobi entre $V_a^0(x)$, $V_b^0(y)$ et $V_c^i(z)$ à $x^0 = y^0 = z^0$. On obtient alors les deux conditions suivantes

$$[P_a, P_b] = - f_{abc} P_c \tag{II.3}$$

$$P_b S - S F_b = 0 \tag{II.4}$$

et ceci pour tout a, b .

(b) Considérons en premier lieu l'équation II.3 pour a et $b \neq 0$ et remarquons que les huit matrices F_a vérifient également

$$[F_a, F_b] = - f_{abc} F_c \tag{II.5}$$

Ainsi les huit matrices P_a ($a \neq 0$) forment une représentation de dimension 9 de $SU(3)$ donc une représentation réductible. Les huit matrices F_a forment une représentation de $SU(3)$ réductible $8 + 1$.

On fait l'hypothèse qu'on peut passer de façon continue de F_a à P_a (ceci est en particulier vrai si on veut pouvoir considérer le cas $F_a = P_a$ comme une approximation raisonnable). Dans ce cas, les P_a sont aussi réductibles à $8 + 1$ et forment une représentation équivalente à celle des F_a d'où la forme générale des matrices P_a

$$P_a = Z F_a Z^{-1} \quad \text{pour } a \neq 0 \quad (\text{II.6})$$

D'après II.3) P_0 vérifie

$$[P_0, P_a] = 0 \quad \text{pour tout } a \quad (\text{II.7})$$

Soit en tenant compte de II.6

$$[Z^{-1} P_0 Z, F_a] = 0 \quad \text{pour tout } a \quad (\text{II.8})$$

Il est facile de démontrer que la forme générale d'une matrice X qui commute avec les huit matrices F_a est de la forme

$$X_{\alpha\beta} = x \delta_{\alpha\beta} + x' \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} \quad (\text{II.9})$$

d'où la forme générale de P_0

$$P_0 = Z \Pi_0 Z^{-1} \quad (\text{II.10})$$

$$\text{avec} \quad (\Pi_0)_{\alpha\beta} = p \delta_{\alpha\beta} + p' \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} \quad (\text{II.11})$$

(c) Considérons maintenant l'équation II.4 en tenant compte des résultats précédents, elle s'écrit alors

$$[Z^{-1} S, F_b] = 0 \quad \text{pour tout } b \neq 0 \quad (\text{II.12})$$

$$\text{d'où} \quad (Z^{-1} S)_{\alpha\beta} = s \delta_{\alpha\beta} + s' \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} \quad (\text{II.13})$$

On suppose $s(s + s') \neq 0$ c'est-à-dire S inversible. On peut alors remplacer dans tout ce qui précède Z par S .

(d) En conclusion, on voit donc que toute la cassure de symétrie peut être décrite par la matrice des termes de Schwinger et on peut exprimer les neuf matrices P_a en fonction de S , F_a et Π_0

$$P_a = S F_a S^{-1} \quad \text{pour } a \neq 0 \quad (\text{II.14})$$

$$P_0 = 0 \quad (\text{II.15})$$

2 - Invariance de Lorentz et commutateurs de courants et de dérivées de courants

Nous nous proposons ici en utilisant le commutateur à temps égaux (C.T.E.) de la composante 0-0 du tenseur énergie impulsion et d'une composante d'un courant vectoriel de donner une forme générale pour les C.T.E. de courants avec $\partial^\mu V_\mu^a(x)$ et $\partial^0 V_a^i(x) - \partial^i V_a^0(x)$. On déduira des contraintes sur les P_a dans le cas des courants conservés. Enfin on discutera le commutateur $[\partial^\mu V_\mu^a(x), V_i^b(y)]_{x=y}^{00}$.

(a) Dérivation des commutateurs avec $\partial^\mu V_\mu^a(x)$ et $\partial^0 V_a^i(x) - \partial^i V_a^0(x)$

Nous partons des C.T.E. d'une composante 0-0 du tenseur énergie impulsion et d'une composante d'un courant vectoriel qui ont été dérivés par GROSS et JACKIW^{[21][22]} en utilisant le principe d'action de Schwinger et l'invariance de Lorentz

$$i[T^{00}(z), V_a^0(x)]_{x=z}^{00} = \partial_\mu V_\mu^a(z) \delta_3(\vec{z} - \vec{x}) + V_a^i(z) \partial_i \delta_3(\vec{z} - \vec{x}) \quad (\text{II.16})$$

$$i[T^{00}(z), V_a^i(x)]_{x=z}^{00} = (\partial^0 V_a^i(z) - \partial^i V_a^0(z)) \delta_3(\vec{z} - \vec{x}) - V_a^0(z) \partial^i \delta_3(\vec{z} - \vec{x}) \quad (\text{II.17})$$

Nous utilisons les C.T.E. de deux composantes de courants discutés dans la section 1. (equations II.1, II.14, II.15).

- De l'identité de Jacobi entre $T^{00}(z)$, $V_a^0(x)$, $V_b^0(y)$ à $x^0 = y^0 = z^0$ on déduit immédiatement :

$$[\partial^\mu V_\mu^a(x), V_b^0(y)]_{x^0=y^0} = \frac{i}{2} f_{abc} \partial_\mu V_c^\mu(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) + i \bar{Q}_{ab}(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) - i(P_{abc} - f_{abc}) V_c^i(x) \partial_i \delta_3(\vec{x} - \vec{y})$$

avec $\bar{Q}_{ab}(x) = \bar{Q}_{ba}(x)$ (II.18)

On peut également obtenir ce résultat en utilisant comme KUO et M. SUGAWARA^[23] une transformation de Lorentz propre.

- De l'identité de Jacobi entre $T^{00}(z)$, $V_a^0(x)$, $V_b^i(y)$ à $x^0 = y^0 = z^0$ on déduit facilement

$$[\partial^\mu V_\mu^a(x), V_b^i(y)]_{x^0=y^0} = i R_{ab}^i(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) - i(P_{abc} - f_{abc}) V_c^0(x) \partial^i \delta_3(\vec{x} - \vec{y})$$

(II.19)

Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant M^{0i} (générateur d'une transformation de Lorentz propre) au lieu de $T^{00}(z)$.

- De l'identité de Jacobi entre $T^{00}(z)$, $V_a^i(x)$, $V_b^j(y)$ à $x^0 = y^0 = z^0$ on déduit

$$[\partial^0 V_a^i(x) - \partial^i V_a^0(x), V_b^j(y)]_{x^0=y^0} = i C_{ab}^{ij}(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) - i P_{bac} V_c^i(x) \partial^j \delta_3(\vec{x} - \vec{y})$$

avec $C_{ab}^{ij}(x) = C_{ba}^{ji}(x)$ (II.20)

(b) Courants conservés

Supposons $\partial^\mu V_\mu^a(x) = 0$ (II.21)

(II.18) implique

$$\bar{Q}_{ab}(x) = -\frac{i}{2} f_{abc} \partial_{\mu} V_c^{\mu}(x) \quad (\text{II.22})$$

$$P_{abc} = f_{abc}$$

(II.19) implique

$$R_{ab}^i(x) = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$P_{abc} = f_{abc}$$

Ainsi si le courant $V_{\mu}^a(x)$ est conservé on doit avoir

$$P_a = F_a \quad (\text{II.24})$$

ou

$$[F_a, S] = 0$$

(II.22) montre aussi que le commutateur $[\partial^{\mu} V_{\mu}^b(x), V_a^o(y)]_{x^o=y^o}$ est complètement déterminé en utilisant

$$\bar{Q}_{ba} = \bar{Q}_{ab} = -\frac{i}{2} f_{abc} \partial_{\mu} V_c^{\mu}(x)$$

soit

$$[\partial^{\mu} V_{\mu}^b(x), V_a^o(y)]_{x^o=y^o} = i f_{bac} \partial_{\mu} V_c^{\mu}(x) - i(P_{bac} - f_{bac}) V_c^i(x) \partial_i \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{II.25})$$

$$(c) \text{ Commutateur } [\partial^{\mu} V_{\mu}^a(x), V_b^i(y)]_{x^o=y^o}$$

Si le courant n'est pas conservé, on peut postuler l'existence d'un méson scalaire de même nombre quantique que ce courant. Si on généralise l'hypothèse P.C.A.C. (maintenant P.C.V.C.) sous la forme forte, c'est-à-dire

$$\partial^{\mu} V_{\mu}^a(x) = K_a \Phi^a(x) \quad (\text{II.26})$$

où Φ^a est le champ associé au méson scalaire, on est naturellement conduit à considérer $\partial^{\mu} V_{\mu}^a(x)$ comme une variable canonique qui doit commuter avec $V_b^i(y)$

autre variable canonique si on a l'identité champ-courant (voir algèbre des champs). On doit alors avoir

$$[\partial^\mu v_\mu^a(x), v_b^i(y)]_{x_o=y_o} = 0 \quad (\text{II.27})$$

d'où comme précédemment on obtient

$$P_a = F_a$$

$$R_{ab}^i(x) = 0$$

Ainsi, une telle hypothèse implique nécessairement que les C.T.E. de deux composantes (0 et i) de courant soient ceux proposés par GELL MANN.

En écrivant l'identité de Jacobi entre $\partial^\mu v_\mu^a(x)$, $v_o^b(y)$, $v_i^c(z)$ à $x_o = y_o = z_o$ on obtient immédiatement la condition supplémentaire dans une telle théorie

$$[[\partial_\mu v_\mu^a(x), v_b^o(y)]_{x_o=y_o=z_o}, v_c^i(z)] = 0$$

$$\text{soit} \quad [\bar{Q}_{ab}(x), v_c^i(z)] = 0 \quad (\text{II.28})$$

Remarquons qu'on aboutit au même résultat avec une condition plus faible que (II.27) :

$$[\partial^o Q_o^a(x_o), v_b^i(x)] = 0 \quad (\text{II.29})$$

où $Q_\mu^a(x_o)$ est la charge $\int d_3 \vec{x} v_\mu^a(x)$.

En effet, l'identité de Jacobi entre $\partial^o Q_o^a(y_o)$, $v_o^b(y)$, $v_i^c(z)$ à $y_o = z_o$ implique

$$[\frac{1}{2} f^{abd} \partial_\mu v_d^\mu(y) + \bar{Q}_{ab}(y), v_i^c(z)]_{y_o=z_o} = 0 \quad (\text{II.30})$$

soit, d'après les propriétés différentes de symétrie en a et b

$$[\partial_\mu v_d^\mu(y), v_i^c(z)]_{y^0=z^0} = 0$$

et

$$[\bar{Q}_{ab}(y), v_i^c(z)]_{y^0=z^0} = 0$$

3 - Règles de somme

La donnée de S nous fournit l'équivalent de la 1ère règle de somme de Weinberg. La 2ème règle de somme de Weinberg est liée à $\langle 0 | C_{ab}^{ij}(x) | 0 \rangle$ ainsi qu'on l'a vu dans la 1ère partie.

(a) Généralisation de la 2ème règle de somme de Weinberg

Nous suivons une méthode développée par JACKIW^[24]. Pour cela, nous partons de la valeur moyenne dans le vide de l'identité de Jacobi entre $\partial^0 v_a^i(x) - \partial^i v_a^0(x)$, $Q_b^j(x^0)$ et $Q_c^0(x^0)$ et nous faisons les deux hypothèses supplémentaires

$$\langle 0 | [C_{ab}^{ij}(x), Q_c^0(x^0)] | 0 \rangle = 0 \quad (\text{II.31})$$

$$\langle 0 | [[\partial^0 Q_o^a(x_o), v_i^b(x)], Q_j^c(x^0)] | 0 \rangle = 0 \quad (\text{II.32})$$

(Pour les raisons discutées dans la section 2(c) nous ne pouvons pas imposer $[\partial^0 Q_o^a(x_o), v_i^b(x)] = 0$).

En rappelant que $\langle 0 | C_{ab}^{ij}(x) | 0 \rangle = g^{ij} C_{ab}$, on obtient

$$P^{cb\gamma} C_{a\gamma} + P^{ca\gamma} C_{\gamma b} = 0 \quad (\text{II.33})$$

ou

$$P^c C + C \tilde{P}^c = 0 \quad (\text{II.34})$$

Pour $c \neq 0$ on obtient alors

$$[F^c, S^{-1} C S^{-1}] = 0 \quad (\text{II.35})$$

c'est-à-dire

$$C = S \Gamma S \quad (\text{II.36})$$

avec

$$\Gamma_{\alpha\beta} = c \delta_{\alpha\beta} + c' \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} \quad (\text{II.37})$$

Pour $c = 0$, l'équation est immédiatement satisfaite en tenant compte de (II.15).

(b) Règles de somme

Utilisons de la première partie (I.4), les règles de somme s'écrivent

$$G_R^{-1} M_R^2 \tilde{G}_R^{-1} = S \quad (\text{II.38})$$

$$G_R^{-1} M_R^4 \tilde{G}_R^{-1} = S \Gamma S \quad (\text{II.39})$$

d'où on tire facilement

$$G_R^{-1} \tilde{G}_R^{-1} = \Gamma^{-1} \quad (\text{II.40})$$

et il est facile de voir que G_R est alors de la forme

$$G_R = T^{-1} G_D \quad (\text{II.41})$$

avec

$$G_D \text{ diagonal et } G_D^2 = \Gamma^{-1} \quad (\text{II.42})$$

et T est une matrice orthogonale

$$T^{-1} = \tilde{T} \quad (\text{II.43})$$

Donc toute la brisure de symétrie se manifeste dans les masses et par un mixing, mais les constantes de couplage diagonales sont invariantes par SU(3)

III. ALGÈBRE DES CHAMPS ET CASSURE DE LA SYMÉTRIE SU(3)

LEE, WEINBERG et ZUMINO^[12] ont montré que l'algèbre des champs de jauge peut être utilisée pour redonner les résultats de l'algèbre des courants. En plus, on a une forme explicite pour des commutateurs importants. Ceci permet une dérivation élégante et simple des deux règles de somme de Weinberg^[11]. Dans ce modèle, on montre aussi, facilement que le courant hadronique électromagnétique est une combinaison linéaire de champs de jauge^[25]. Nous nous proposons ici d'étudier la cassure de la symétrie SU(3) dans ce contexte et en particulier de retrouver les résultats précédents.

1 - Equations de champ et lois de conservation

Nous partons du lagrangien suivant pour neuf champs vectoriels Φ_{μ}^a couplés à des champs de matière Ψ :

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu}^2(x) K_{\alpha\beta} F_{\beta}^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} \Phi_{\alpha\mu}(x) M_{\alpha\beta}^2 \Phi_{\beta}^{\mu}(x) + \mathcal{L}_m(\Psi, D_{\mu} \Psi) \quad (\text{III.1})$$

où

$$F_{\alpha\mu\nu}^2(x) = \partial_{\mu} \Phi_{\alpha\nu}(x) - \partial_{\nu} \Phi_{\alpha\mu}(x) + \frac{1}{2} f_{\alpha\beta\gamma} (G_{\beta\delta} \Phi_{\delta\mu}(x) \Phi_{\gamma\nu}(x) + G_{\gamma\delta} \Phi_{\delta\nu}(x) \Phi_{\beta\mu}(x)) \quad (\text{III.2})$$

$D_{\mu} \Psi$ est la dérivée covariante définie par

$$D_{\mu} \Psi = \partial_{\mu} \Psi + T_{\alpha} G_{\alpha\beta} \Phi_{\beta\mu}(x) \Psi \quad (\text{III.3})$$

-i T_{α} = générateur de SU(3) dans la représentation des Ψ ($\alpha = 1, \dots, 8$)

-i T_0 = générateur du nombre baryonique

$G_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}^2$ et $K_{\alpha\beta}$ sont des matrices réelles et symétriques 9×9 . De plus, on

suppose que K et M^2 ont leurs valeurs propres positives. On pourra écrire $K = \tilde{Z} Z$ par diagonalisation.

Les équations de champ pour $\Phi_a^\mu(x)$ s'écrivent

$$-M_{a\beta}^2 \Phi_\beta^\rho = K_{a\beta} \partial_\sigma F_\beta^{\sigma\rho} + G_{a\beta} J_\beta^\rho + \frac{1}{2} K_{\alpha\delta} F_\delta^{\rho\nu} \Phi_{\gamma\nu} (f_{\alpha\beta\gamma} G_{\beta a} + f_{\alpha\beta a} G_{\beta\gamma}) \quad (\text{III.4})$$

où J_β^ρ est le courant habituel de $SU(3)$ ou baryonique

$$J_\beta^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \Phi_\nu^\alpha)} f_{\alpha\beta\gamma} \Phi_{\gamma\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial (\partial_\rho \Psi)} T_\beta \Psi \quad (\text{III.5})$$

On impose que les divergences de J_β^ρ et Φ_β^ρ soient proportionnelles au sens matriciel afin de préserver les lois de conservation. On doit donc avoir

$$f_{\alpha\beta\gamma} G_{\beta a} + f_{\alpha\beta a} G_{\beta\gamma} = 0 \quad \text{où} \quad [F^\alpha, G] = 0$$

$$\text{soit} \quad G_{\alpha\beta} = g_0 \delta_{\alpha\beta} + (g'_0 - g_0) \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} \quad (\text{III.6})$$

et on a maintenant

$$M_{a\beta}^2 \partial_\rho \Phi_\beta^\rho = - G_{a\beta} \partial_\rho J_\beta^\rho \quad (\text{III.7})$$

$F_{\alpha\mu\nu}$ s'écrit maintenant

$$F_{\alpha\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_{\alpha\nu} - \partial_\nu \Phi_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} g_0 f_{\alpha\beta\gamma} [\Phi_{\beta\mu} \Phi_{\gamma\nu}]_+ \quad (\text{III.8})$$

Définissons $V_a^\mu(x)$ par

$$V_a^\mu(x) = - G_{ab}^{-1} M_{bc}^2 \Phi_c^\mu(x) \quad (\text{III.9})$$

(III.9) s'écrit alors

$$\partial_\mu V_a^\mu(x) = \partial_\mu J_a^\mu(x) \quad (\text{III.10})$$

Les courants V_a^μ ont donc les mêmes lois de conservation que les courants J_a^μ .

2 - Lois de commutation des courants $J_a^\mu(x)$ et $V_a^\mu(x)$

(a) Lois de commutation canonique

$$\text{On définit } \hat{\Phi}_\alpha^\rho = Z_{\alpha\beta} \Phi_\beta^\rho \quad (\text{III.11})$$

et le moment conjugué

$$\hat{\Pi}_j^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\alpha \hat{\Phi}_j)} = - Z_{\alpha\beta} F_\beta^{\alpha j} \quad (\text{III.12})$$

Les lois de commutation canonique s'écrivent

$$\begin{aligned} [\hat{\Phi}_k^\alpha(x), \hat{\Pi}_j^\beta]_{x^0=y^0} &= i \delta_{\alpha\beta} g_{jk} \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\hat{\Phi}_k^\alpha(x), \hat{\Phi}_j^\beta(y)]_{x^0=y^0} &= 0 \\ [\hat{\Pi}_k^\alpha(x), \hat{\Pi}_j^\beta(y)]_{x^0=y^0} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

De même on quantifie les champs Ψ

$$\begin{aligned} P_\Psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\alpha \Psi)} = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial (\partial^\alpha \Psi)} \quad (\text{III.14}) \\ [\Psi^\alpha(x), P_\Psi^\beta(y)]_{x^0=y^0} &= i \delta_{\alpha\beta} \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \\ [\Psi^\alpha(x), \Psi^\beta(y)]_{x^0=y^0} &= 0 \\ [P_\Psi^\alpha(x), P_\Psi^\beta(y)]_{x^0=y^0} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

- On a supposé que le coefficient du terme d'énergie cinétique des champs Ψ était l'unité, si ce n'est pas le cas, on procède comme pour les champs Φ_α^μ .

- Si les Ψ ont des indices tensoriels (pour les transformations de Lorentz) on remplace $\delta_{\alpha\beta}$ par le produit de $\delta_{\alpha\beta}$ pour les indices de symétrie interne et de tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ pour les indices tensoriels.

(b) Lois de commutation des J_α^0

On exprime $J_\alpha^0(x)$ en fonction des variables canoniques

$$J_\alpha^0 = - \hat{\Pi}_{j\gamma} (Z \hat{\sigma}_\alpha^\gamma Z^{-1})_{\gamma\delta} \hat{\Phi}_\delta^j - \Pi_\Psi T_\alpha^\Psi \quad (\text{III.16})$$

avec
$$\hat{\mathcal{H}}_\alpha = - F_\alpha \quad (\text{III.17})$$

on obtient alors aisément

$$[J_\alpha^0(x), J_\beta^0(y)]_{x=y}^0 = i f_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma^0(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{III.18})$$

(c) Lois de commutation des $V_\alpha^\mu(x)$

On utilise les équations de champs pour exprimer $V_\alpha^0(x)$ en fonction des variables canoniques

$$V_\alpha^0(x) = G_{\alpha\beta}^{-1} \tilde{Z}_{\beta\gamma} \partial_j \hat{\Pi}_\gamma^j(x) + J_\alpha^0(x) \quad (\text{III.19})$$

on obtient alors en utilisant les lois de commutation canonique

$$[V_\alpha^0(x), V_\beta^0(y)]_{x=y}^0 = i f_{\alpha\beta\gamma} V_\gamma^0(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{III.20})$$

$$\begin{aligned} [V_\alpha^0(x), V_\beta^i(y)]_{x=y}^0 &= i(G^{-1} M^2 G^{-1})_{\beta\rho} f_{\alpha\rho\sigma} (G^{-1} M^2 G^{-1})_{\sigma\gamma} V_\gamma^i(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \\ &+ i(G^{-1} M^2 G^{-1})_{\alpha\beta} \partial^i \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

$$[V_\alpha^i(x), V_\beta^j(y)]_{x=y}^0 = 0 \quad (\text{III.22})$$

Ce modèle fournit donc les lois de commutation (II.1) en particulier les termes de Schwinger sont des nombres et les composantes spatiales commutent.

On a de plus, en explicitant $\hat{\Pi}_\alpha^i(x)$

$$\begin{aligned}
[\partial^0 v_\alpha^i(x) - \partial^i v_\alpha^0(x), v_\beta^j(y)]_{x^0=y^0} &= i g^{ij} (G^{-1} M^2 K^{-1} M^2 G^{-1})_{\alpha\beta} \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \\
&\quad - i P^{\mu\alpha\sigma} S_{\mu\nu}^{-1} P^{\nu\beta\rho} v_\sigma^i(x) v_\rho^j(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \\
&\quad - i P^{\beta\alpha\gamma} v_\gamma^i(x) \partial^j \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (\text{III.23})
\end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad S = G^{-1} M^2 G^{-1} \quad P^\alpha = S F^\alpha S^{-1} \quad (\text{III.24})$$

3 - Renormalisation des champs vectoriels

On considère le cas où il y a des courants conservés et on suppose qu'il n'y a pas de mixing entre les courants (ou champs) conservés et ceux non conservés [il suffit pour cela que les charges de SU(3) et le nombre baryonique soient conservés (par exemple v_μ^3 et v_μ^8 sont conservés) car physiquement il ne peut y avoir de mixing qu'entre états de mêmes nombres quantiques (correspondant à des courants conservés)]. On se place alors dans le sous-espace des courants conservés : les champs renormalisés sont définis par

$$\Phi^\mu = R \Phi_R^\mu \quad (\text{III.25})$$

En écrivant les équations de champs pour Φ^μ et Φ_R^μ

$$M^2 \Phi^\mu = - \partial_\nu G^{\nu\mu} + G J^{\prime\mu} \quad (\text{III.26})$$

$$M_R^2 \Phi_R^\mu = - \partial_\nu G_R^{\nu\mu} + G_R J_R^{\prime\mu} \quad (\text{III.27})$$

où

$$G_{(\)}^{\nu\mu} = \partial^\nu \Phi_{(\)}^\mu - \partial^\mu \Phi_{(\)}^\nu$$

Suivant LEE, KROLL et ZUMINO^[2] $J^{\prime\mu}$ est normalisé tel que

$$\int J_\alpha^0(x) d_3 \vec{x} = \int J_\alpha^0(x) d_3 \vec{x} = -i \mathcal{F}_\alpha \quad (\text{générateur})$$

puisque $J_R^{\prime\mu}$ est aussi conservé, on le normalise aussi de cette façon ce qui fixe G_R par

$$G_R^{-1} M_R^2 R^{-1} M^{-2} G = I \quad (\text{III.28})$$

$$\text{d'où} \quad G^{-1} M^2 \Phi_\mu = G_R^{-1} M_R^2 \Phi_\mu^R \quad (\text{III.29})$$

$$\text{et} \quad V^\mu = - G_R^{-1} M_R^2 \Phi_R^\mu \quad (\text{III.30})$$

Les courants V^μ conservés ne sont donc pas renormalisés et peuvent être considérés comme les courants physiques.

Si de plus, il y a un sous groupe conservé (par exemple l'isospin dans le cas qui nous intéressera), si on fait l'hypothèse que les courants physiques vérifient l'algèbre des charges, alors l'égalité (III.28) doit être vraie dans tout l'espace.

4 - Identité champ-courant pour le courant électromagnétique

Les interactions électromagnétiques sont introduites en suivant LEE et ZUMINO^[25]. Dans le lagrangien (III.1) sauf dans les termes de masse, on fait le changement

$$\Phi_a^\mu \rightarrow \tilde{\Phi}_a^\mu = \Phi_a^\mu - e_o G_{ab}^{-1} \xi_b A^\mu \quad (\text{III.31})$$

où A^μ est le champ électromagnétique et ξ_b un nombre qui vaut :

$$\begin{aligned} \xi_a &= 1 & \text{si } a = 3 \\ \xi_a &= \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{si } a = 8 \\ \xi_a &= 0 & \text{autrement} \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

Les équations de champs pour A^μ s'écrivent alors

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = - e_o \xi_b (G^{-1} M^2)_{bc} \Phi_c^\mu \equiv e_o J_{em}^\mu \quad (\text{III.33})$$

$$\text{Soit} \quad J_{em}^\mu = \xi_a V_a^\mu \quad (\text{III.34})$$

qui est l'identité désirée.

Les lois de commutation dérivées précédemment sont encore valables

à l'ordre 0 en e_0 .

5 - Règles de somme

La valeur de $C_{\alpha\beta}$ est obtenue en prenant la valeur moyenne dans le vide de (III.23). On suppose que $\langle 0 | V_{\sigma}^i(x) V_{\rho}^j(x) | 0 \rangle = 0$ bien que ce terme ne soit pas très bien défini^[12]. On obtient alors les deux règles de somme

$$G_R^{-1} M_R^2 \tilde{G}_R^{-1} = G^{-1} M^2 G^{-1} \quad (\text{III.35})$$

$$G_R^{-1} M_R^4 \tilde{G}_R^{-1} = G^{-1} M^2 K^{-1} M^2 G^{-1} \quad (\text{III.36})$$

d'où $G_R^{-1} \tilde{G}_R^{-1} = G^{-1} K G^{-1} \quad (\text{III.37})$

G_R est donc de la forme

$$G_R = T^{-1} \tilde{Z}^{-1} G \quad (\text{III.38})$$

avec $T^{-1} = \tilde{T}$

Nous pouvons maintenant comparer avec les résultats obtenus précédemment :

(A) On retrouve les résultats précédents; en particulier l'hypothèse II.32 est valable (on peut voir que II.31 est toujours valable) si K est invariant $SU(3)$

$$K_{\alpha\beta} = k_0 \delta_{\alpha\beta} + (k'_0 - k_0) \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} \quad (\text{III.39})$$

$(M^2)_{\alpha\beta}$ quelconque

Un tel modèle pourra être appelé un modèle "mass mixing".

(B) On retrouve les résultats habituels de l'algèbre des courants de GELL MANN si S est invariant par $SU(3)$ c'est-à-dire

$$(M^2)_{\alpha\beta} = M_0^2 \delta_{\alpha\beta} + (M_0'^2 - M_0^2) \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} \quad (\text{III.40})$$

$K_{\alpha\beta}$ quelconque

Un tel modèle pourra être appelé un modèle "current mixing".

On pourra aussi regarder un modèle (C) où c'est l'expression (III.36) $(G_R^{-1} M_R^4 \tilde{G}_R^{-1})$ qui est invariante SU(3).

On peut remarquer que dans l'approximation faite pour saturer les règles de somme, ou bien toutes les quantités $G_R^{-1} M_R^{2p} G_R^{-1}$ sont invariantes, ou bien il y en a au plus une qui est invariante.

Remarquons qu'en tenant compte de III.28, on obtient dans le sous espace des courants conservés

$$M_R^2 = T^{-1} \tilde{Z}^{-1} M^2 Z^{-1} \quad (\text{valable dans tout l'espace}) \quad (\text{III.41})$$

et $R = T^{-1} Z \quad (\text{III.42})$

T^{-1} joue le rôle d'un simple mixing et Z de matrice de renormalisation. Dans le cas (B) il n'y a donc pas de renormalisation. Ceci suggère une utilisation d'un point de vue phénoménologique de l'algèbre des champs.

IV. THEORIE DES COURANTS ET CASSURE DE LA SYMETRIE SU(3)

H. SUGAWARA^{[26][6]} a proposé une théorie des courants faisant abstraction de toute notion de champ. Le but est de construire un tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}(x)$ fonction des courants $V_\mu^\alpha(x)$ qui ont des lois de commutation données, de façon à satisfaire à l'invariance de Lorentz. Nous nous proposons de résoudre ce problème dans le cas des lois de commutation discutées en I. Ce problème a été également résolu par GROSS et HALPERN^[27] en partant d'un lagrangien du type (B) mass mixing et en appliquant le processus de limite ($m_0^2 \rightarrow 0$, $g_0 \rightarrow 0$, $m_0/g_0 \rightarrow$ limite finie) dû à BARDAKCI, FRISHMAN et HALPERN^[28].

1 - Hypothèses

(a) Les neuf courants $V_\alpha^\mu(x)$ satisfont aux lois de commutation discutées en I c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
[V_a^0(x), V_b^0(y)]_{x^0=y^0} &= i f_{abc} V_c^0(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \\
[V_a^0(x), V_b^i(y)]_{x^0=y^0} &= i P_{abc} V_c^i(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) + i S_{ab} \partial^i \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \\
[V_a^i(x), V_b^j(y)]_{x^0=y^0} &= 0
\end{aligned}
\tag{IV.1}$$

avec

$$P_a = S F_a S^{-1} \tag{IV.2}$$

(b) $T_{\mu\nu}(x)$ est fonction de $V_\alpha^\mu(x)$. On se restreint au cas simple où $T_{\mu\nu}(x)$ est une fonction bilinéaire de $V_\alpha^\mu(x)$; plus précisément il est de la forme :

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2} X_{\alpha\beta} \{ [V_\mu^\alpha(x), V_\nu^\beta(x)]_+ - g_{\mu\nu} V_\rho^\alpha(x) V^{\rho\beta}(x) \} \tag{IV.3}$$

$X_{\alpha\beta}$ est une matrice à déterminer.

(c) On définit

$$P_\mu(x^0) = \int T_{0\mu}(x) d_3 \vec{x} \tag{IV.4}$$

$$M_{\mu\nu}(x^0) = \int (x_\mu T_{0\nu}(x) - x_\nu T_{0\mu}(x)) d_3 \vec{x} \tag{IV.5}$$

On fait les deux hypothèses suivantes

$$i[P_\mu(x^0), V_\rho^\mu(x)] = \partial_\mu V_\rho^a(x) \tag{IV.6}$$

et $T_{\mu\nu}(x)$ satisfait à l'équation de Schwinger^[29]

$$[T_{00}(x), T_{00}(y)]_{x^0=y^0} = -i [T_{0k}(x) + T_{0k}(y)] \partial^k \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{IV.7}$$

2 - Invariance de Lorentz

(a) En utilisant uniquement l'équation de Schwinger (IV.7) et les lois de commutation (IV.1), on obtient

$$X_{\alpha\beta} = (S^{-1})_{\alpha\beta} \quad (\text{IV.8})$$

S inversible est donc une condition nécessaire d'existence de la théorie d'où la forme définitive de $T_{\mu\nu}(x)$

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}(S^{-1})_{\alpha\beta} \{ [V_{\mu}^{\alpha}(x), V_{\nu}^{\beta}(x)]_+ - g_{\mu\nu} V_{\rho}^{\alpha}(x) V^{\rho\beta}(x) \} \quad (\text{IV.9})$$

(b) En utilisant explicitement l'hypothèse (IV.6), on obtient pour les lois de commutation des densités $T_{\mu\nu}(x)$

$$\begin{aligned} [T_{00}(x), T_{00}(y)]_{x^0=y^0} &= -i[T_{0k}(x) + T_{0k}(y)] \partial^k \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \\ [T_{0i}(x), T_{00}(y)]_{x^0=y^0} &= i[T_{00}(x) \partial_i \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) - T_{ik}(y) \partial^k \delta_3(\vec{x} - \vec{y})] \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

$$[T_{0i}(x), T_{0j}(y)]_{x^0=y^0} = i[T_{0i}(y) \partial_j \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) + T_{0j}(x) \partial_i \delta_3(\vec{x} - \vec{y})] \quad (\text{IV.11})$$

De ces équations, on obtient aisément la conservation du tenseur énergie impulsion en écrivant :

$$\begin{aligned} \partial^{\mu} T_{\mu\nu}(x) &= i \int d_3 \vec{y} [T^{0\mu}(\vec{y}, x^0), T_{\mu\nu}(x)] \\ \partial^{\mu} T_{\mu\nu}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

P_{μ} et $M_{\mu\nu}$ sont alors indépendants de x^0 et on vérifie aisément les lois de commutation du groupe de Poincaré

$$\left\{ \begin{aligned} [P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0 \\ [M_{\mu\nu}, P_{\rho}] &= i(g_{\nu\rho} P_{\mu} - g_{\mu\rho} P_{\nu}) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma}) \end{aligned} \right. \quad (\text{IV.13})$$

(c) on doit vérifier maintenant que $V_\alpha^\mu(x)$ se transforme effectivement comme un vecteur. On obtient d'abord

$$i[T_{oi}(x), V_o^a(y)]_{x=y} = -V_o^a(x) \partial_i \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (IV.14)$$

$$i[T_{oo}(x), V_o^a(y)]_{x=y} = \partial_\mu V_\mu^a(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) + V^{ja}(x) \partial_j \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (IV.15)$$

$$i[T_{o\mu}(x), V_i^a(y)]_{x=y} = (\partial_\mu V_i^a(x) - \partial_i V_\mu^a(x)) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) - V_\mu^a(x) \partial_i \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (IV.16)$$

Ces équations s'obtiennent en même temps que les équations du mouvement que nous donnerons plus loin.

Ici, on a réobtenu en particulier les équations avec $T_{oo}(x)$ utilisées en I.

Remarque : Si on part de $T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} [V_\mu^\alpha(x) V_\nu^\beta(x)]_+ - Y_{\alpha\beta} V_\rho^\alpha(x) V^{\rho\beta}(x))$ l'équation de Schwinger et l'équation IV.16 pour $\mu = 0$ donnent facilement

$$X = Y = S^{-1}$$

On a maintenant facilement les lois de transformation de $V_\rho^a(x)$ par le groupe de Poincaré

$$i[P_\mu, V_\rho^a(x)] = \partial_\mu V_\rho^a(x) \quad (IV.17)$$

$$i[M_{\mu\nu}, V_\rho^a(x)] = (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) V_\rho^a(x) + g_{\mu\rho} V_\nu^a(x) - g_{\nu\rho} V_\mu^a(x)$$

3 - Equations du mouvement et autres lois de commutation

Les équations du mouvement pour $V_\mu^a(x)$ s'écrivent

$$\partial_\mu V_\nu^a(x) - \partial_\nu V_\mu^a(x) = \frac{1}{2} S_{ab} (S^{-1} F S^{-1})_{cd} [V_\mu^c(x), V_\nu^d(x)]_+ \quad (IV.18)$$

$$\partial^\mu V_\mu^a(x) = \frac{1}{4} [S^{-1}, F^a]_{cd} [V_\mu^c(x), V^{\mu d}(x)]_+ \quad (IV.19)$$

d'où on déduit que $\partial^\mu V_\mu^a(x) = 0 \Leftrightarrow [S, F^a] = 0$, résultat obtenu en I.

Nous utiliserons ces équations afin de dériver les autres commutateurs étudiés en I.

$$[\partial^\mu V_\mu^a(x), V_0^b(y)]_{x=y} = \frac{i}{2} f^{abc} \partial^\mu V_\mu^c(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) + i \bar{Q}^{ab}(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) - i(P^{abc} - f^{abc}) V_i^c(x) \partial^i \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (IV.20)$$

avec

$$\bar{Q}_{ab}(x) = \frac{1}{8} ([F^a, S^{-1}], F^b] + [[F^b, S^{-1}], F^a])_{cd} [V_\mu^c(x), V^{\mu d}(x)]_+ \quad (IV.21a)$$

$$= -\frac{1}{2} f^{abc} \partial^\mu V_\mu^c(x) + \frac{1}{4} [[F^a, S^{-1}], F^b]_{cd} [V_\mu^c(x), V^{\mu d}(x)]_+ \quad (IV.21b)$$

$$= \frac{1}{2} f^{abc} \partial^\mu V_\mu^c(x) + \frac{1}{4} [[F^b, S^{-1}], F^a]_{cd} [V_\mu^c(x), V^{\mu d}(x)]_+ \quad (IV.21c)$$

on retrouve les résultats de I pour le cas où V_μ^a ou V_μ^b sont conservés en utilisant (IV.21b) ou (IV.21c)

$$[\partial^\mu V_\mu^a(x), V_i^b(y)]_{x=y} = \frac{i}{2} [S^{-1}, F^a]_{d\sigma} P^{\sigma bc} [V_0^d(x), V_i^c(x)]_+ \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) - i(P^{abc} - f^{abc}) V_0^c(x) \partial_i \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (IV.22)$$

Le résultat est encore conforme à I ($R_{ab}^i(x) = 0$ si a conservé). On a enfin :

$$[\partial_0 V_i^a(x) - \partial_i V_0^a(x), V_j^b(y)]_{x=y} = -i P^{\mu a \sigma} S_{\mu \rho}^{-1} P^{\rho bc} V_j^c(x) V_i^\sigma(x) \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) - i P^{bac} V_i^c(x) \partial_j \delta_3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (IV.23)$$

4 - Règles de somme

(a) Des relations de commutation IV.1, 23, 20 et des résultats de I on déduit

$$\int \left(\frac{\rho_1^{\alpha\beta}(m^2)}{m^2} + \rho_0^{\alpha\beta}(m^2) \right) dm^2 = S_{\alpha\beta} \quad (\text{IV.24})$$

$$g_{ij} \int \rho_1^{\alpha\beta}(m^2) dm^2 = - P^{\mu\alpha\sigma} S_{\mu\nu}^{-1} P^{\nu\beta\rho} < 0 | v_i^\sigma(0) v_j^\rho(0) | 0 > \quad (\text{IV.25})$$

$$\int dm^2 m^2 \rho_0^{\alpha\beta}(m^2) = - \frac{1}{2} [[F^\alpha, S^{-1}], F^\beta]_{cd} < 0 | v_\mu^c(0) v^{\mu d}(0) | 0 > \quad (\text{IV.26})$$

On est donc en présence de quantités indéterminées $< 0 | v_\mu^\alpha(0) v_\nu^\beta(0) | 0 >$. Si nous les supposons proportionnelles à $g_{\mu\nu}$ l'hermiticité des courants entraîne qu'elles sont nulles pour $\alpha = \beta$. Si nous les supposons toutes nulles IV.25 et IV.26 entraînent que

$$\rho_0^{\alpha\beta}(m^2) = \rho_1^{\alpha\beta}(m^2) = 0 \quad (\text{IV.27})$$

en contradiction avec (IV.24) puisque S a été supposé inversible afin de définir $T_{\mu\nu}(x)$.

(b) Supposons qu'on puisse donner un sens aux quantités $< 0 | v_\mu^\alpha(0) v_\nu^\beta(0) | 0 >$. Dans une telle théorie qui est donnée par des lois de commutation à temps égaux, il est naturel de définir ces quantités comme limite $\vec{x} \rightarrow 0$ $< 0 | v_\mu^\alpha(\vec{x}, 0) v_\nu^\beta(0) | 0 >$, on a ainsi choisi une direction privilégiée dans l'espace temps $\eta(1,0,0,0)$ et la forme la plus générale de cette quantité sera donnée par

$$< 0 | v_\mu^\alpha(0) v_\nu^\beta(0) | 0 > = - U_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + V_{\alpha\beta} \eta_\mu \eta_\nu \quad (\text{IV.28})$$

L'hermiticité du courant montre que

$$U_{\alpha\alpha'} \geq 0 \quad (\text{IV.29})$$

$$V_{\alpha\alpha'} \geq U_{\alpha\alpha'} \quad (\text{IV.30})$$

Nous devons maintenant examiner l'invariance du vide par le groupe de Poincaré. Pour cela il suffit que :

$$\langle 0 | T_{00}(0) | 0 \rangle = 0 \quad (\text{IV.31})$$

d'où

$$S_{\alpha\beta}^{-1} (V_{\alpha\beta} + 2 U_{\alpha\beta}) = 0$$

ou

$$\text{Tr}(S^{-1} (V + 2 U)) = 0 \quad (\text{IV.32})$$

Une telle condition semble difficile à réaliser à cause des conditions de positivité de S , U et V , en particulier si les fonctions spectrales sont diagonales (en $\delta_{\alpha\beta}$), (IV.32) est impossible sauf dans le cas trivial S^{-1} où $V = U = 0$.

On pourrait définir le tenseur énergie impulsion $\mathcal{E}_{\mu\nu}$ par

$$\mathcal{E}_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x) - \langle 0 | T_{\mu\nu}(0) | 0 \rangle \quad (\text{IV.33})$$

mais alors si les propriétés des courants ne sont pas changées on n'a plus $\partial^\mu T_{\mu\nu}(x) = 0$ et l'algèbre du groupe de Poincaré n'est plus vérifiée.

Nous devons aussi avoir $\langle 0 | \partial^\mu V_\mu^a(x) | 0 \rangle = 0$

$$\text{d'où} \quad \text{Tr}([S^{-1}, F^a] (V - 4 U)) = 0 \quad (\text{IV.34})$$

Cependant, une telle équation ne semble pas donner de propriété particulière à V et U .

(c) Il semble donc qu'une telle théorie présente de nombreuses difficultés et certains auteurs proposent de l'utiliser comme le modèle des quarks dans l'algèbre de courant, c'est-à-dire d'en retenir seulement quelques propriétés qui peuvent servir d'hypothèses de base à d'autres théories.

(d) On peut également songer à partir directement du tenseur énergie impulsion de champs de Yang et Mills, mais la présence de dérivées de courants dans $T_{\mu\nu}$ amène également des difficultés à moins de réussir à résoudre $T_{\mu\nu}$ uniquement en termes de courants pour l'équation (IV.6).

(e) Nous donnerons finalement une expression indéterminée pour $U_{\alpha\beta}$ et $V_{\alpha\beta}$ en termes des fonctions spectrales. Pour cela nous écrivons

$$\langle 0 | V_{\mu}^{\alpha}(0) V_{\nu}^{\beta}(0) | 0 \rangle = \lim_{\vec{x} \rightarrow 0} \langle 0 | V_{\mu}^{\alpha}(\vec{x}, 0) V_{\nu}^{\beta}(0) | 0 \rangle \quad (\text{IV.35})$$

d'où, en utilisant (I.1) on obtient

$$V_{\alpha\beta} = \int_0^{\infty} dm^2 \left(\frac{4}{3} A(m^2) + m^2 B(m^2) \right) \left(\frac{\rho_1^{\alpha\beta}(m^2)}{m^2} + \rho_0^{\alpha\beta}(m^2) \right) \quad (\text{IV.36})$$

$$U_{\alpha\beta} = \int_0^{\infty} dm^2 \left\{ \frac{A(m^2)}{3} \left(\frac{\rho_1^{\alpha\beta}(m^2)}{m^2} + \rho_0^{\alpha\beta}(m^2) \right) + \rho_1^{\alpha\beta}(m^2) B(m^2) \right\} \quad (\text{IV.37})$$

avec

$$A(m^2) = \lim_{\vec{x} \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{2(k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (\text{IV.38})$$

$$B(m^2) = \lim_{\vec{x} \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{2(k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} \vec{k}^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (\text{IV.39})$$

(f) Nous soulignerons enfin un point concernant le courant baryonique que nous supposons conservé. En utilisant l'équation du mouvement IV.18, on voit que si S_{oa} avec $a \neq 0$ est nul (pas de mixing entre le singulet et l'octet) alors V_{μ}^0 vérifie

$$\square V_{\mu}^0(x) = 0 \quad (\text{IV.40})$$

Cette équation n'est pas compatible avec l'hypothèse de dominance par le ω et le ϕ du courant baryonique^[10].

V. APPLICATION AU MELANGE $\omega - \phi$

Nous étudierons plus spécialement ici le cas où l'isospin, l'hypercharge et le nombre baryonique sont conservés. Nous supposons que la cassure de SU(3) se fait suivant Y. Nous utiliserons alors les règles de somme étudiées précédemment (II et III) dans l'approximation de saturation par les mésons vecteurs afin de prédire $\text{tg } \theta_Y$ et $4 f_Y^2 / 3 f_\rho^2$ définis en I.

1 - Notations

En plus des quantités définies en I (I.24, I.29) nous définissons f_B , θ_B , f_{K^*} par

$$\begin{aligned} \langle 0 | V_\mu^0(0) | \phi \rangle &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{m_\phi^2}{f_B} \sin \theta_B \epsilon_\mu ; & \langle 0 | V_\mu^0(0) | \omega \rangle &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{m_\omega^2}{f_B} \cos \theta_B \epsilon_\mu \\ \langle 0 | V_\mu^6(0) | \frac{K^{*0} + \bar{K}^{*0}}{\sqrt{2}} \rangle &= -\frac{m_{K^*}^2}{f_{K^*}} \epsilon_\mu \end{aligned} \quad (V.1)$$

Les matrices G_R , M_R^2 s'écrivent

$$M_R^2 = \begin{pmatrix} m_\rho^2 I_3 & & & \\ & m_{K^*}^2 I_4 & & \\ & & m_\phi^2 & \\ & & & m_\omega^2 \end{pmatrix} \quad (V.2)$$

I_3 et I_4 sont les matrices unités à trois et quatre dimensions

$$G_R^{-1} = G_D^{-1} T \quad (V.3)$$

avec

$$G_D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_\rho} I_3 & & & \\ & \frac{1}{f_{K^*}} I_4 & & \\ & & \frac{\sqrt{3}}{2 f_Y} & \\ & & & \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{f_B} \end{pmatrix} \quad (V.4)$$

et

$$T = \left(\begin{array}{cc} I_7 & \text{diagram} \\ \text{diagram} & \begin{array}{cc} \cos \theta_Y & -\sin \theta_Y \\ \sin \theta_B & \cos \theta_B \end{array} \end{array} \right) \quad (V.5)$$

2 - Cassure de la symétrie SU(3)

Les règles de somme s'écrivent de façon générale

$$\begin{aligned} \int \frac{\rho(m^2)}{m^2} dm^2 &\equiv G_R^{-1} M_R^2 \tilde{G}_R^{-1} = S \\ \int \rho(m^2) dm^2 &\equiv G_R^{-1} M_R^4 \tilde{G}_R^{-1} = S \Pi S \equiv D \\ \int \frac{\rho(m^2)}{m^4} dm^2 &\equiv G_R^{-1} \tilde{G}_R^{-1} = \Pi^{-1} \end{aligned} \quad (V.6)$$

- Les hypothèses faites dans I conduisent à Π invariant par SU(3)
- Les lois de commutation de GELL MANN conduisent à S invariant par SU(3)
- Nous considérerons aussi les modèles avec D invariant par SU(3).

SAKURAI^[30] ayant montré que la symétrie SU(3) pour toutes les règles de somme était incompatible avec l'expérience, nous ne considérerons pas ce cas ici.

La cassure de SU(3) se faisant suivant Y les quantités non invariantes seront de la forme au 1er ordre dans la cassure.

$$A_0 + \epsilon A_8$$

avec

$$A_{\alpha\beta} = a \delta_{\alpha\beta} + a' \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} \quad (V.7)$$

$$(A_8)_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta} + b' (\delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 8} + \delta_{\alpha 8} \delta_{\beta 0}) + b'' \delta_{\alpha 0} \delta_{\beta 0} \quad (V.8)$$

Il sera aussi utile de considérer le cas où les termes non invariants sont de la forme $(A_0 + \epsilon A_8)^{-1}$. Nous utiliserons la cassure de SU(3) essentiellement sous la forme d'une formule du type Gell Mann-Okubo satisfaite par $A_0 + \epsilon A_8$:

$$4 (A_0 + \epsilon A_8)^{\Delta S} - (A_0 + \epsilon A_8)^I = 3 (A_0 + \epsilon A_8)_{88} \quad (V.9)$$

où ΔS remplace 44, 55, 66 ou 77 et I, 11, 22, 33.

3 - Règles de somme

On peut résumer les différents modèles de la façon suivante

- (a) $G_R^{-1} M_R^{2p} \tilde{G}_R^{-1}$ est invariant SU(3)
- (b) $G_R^{-1} M_R^{2(p+q)} \tilde{G}_R^{-1}$ avec $q = \pm 1$ satisfait une formule du type Gell Mann-Okubo.

De (a), on déduit

$$\frac{m_\rho^{2p}}{f_\rho^2} = \frac{m_{K^*}^{2p}}{f_{K^*}^2} = \frac{3}{4f_Y^2} (m_\Phi^{2p} \cos^2 \theta_Y + m_\omega^{2p} \sin^2 \theta_Y) \quad (V.10)$$

$$m_\Phi^{2p} \operatorname{tg} \theta_B = m_\omega^{2p} \operatorname{tg} \theta_Y$$

On définit θ par

$$\operatorname{tg} \theta = \left(\frac{m_\omega}{m_\Phi} \right)^p \operatorname{tg} \theta_Y = \left(\frac{m_\Phi}{m_\omega} \right)^p \operatorname{tg} \theta_B \quad (V.11)$$

On obtient alors

$$\frac{4f_Y^2}{3f_\rho^2} = \left(\frac{m_\Phi}{m_\rho} \right)^{2p} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta_Y} \quad (V.12)$$

et la relation entre ces taux de désintégration leptonique des mésons vecteurs

$$\frac{m_\rho^{2p-1} \Gamma(\rho \rightarrow e^+ e^-)}{1 + \frac{d\Gamma_\rho}{m_\rho}} = 3(m_\Phi^{2p-1} \Gamma(\Phi \rightarrow e^+ e^-) + m_\omega^{2p-1} \Gamma(\omega \rightarrow e^+ e^-)) \quad (V.13)$$

De (b), on déduit, en tenant compte de (a)

$$4 m_{K^*}^{2q} - m_\rho^{2q} = 3(m_\Phi^{2q} \cos^2 \theta + m_\omega^{2q} \sin^2 \theta) \quad (V.14)$$

et pour les désintégrations leptoniques

$$\frac{m_\rho^{2(p+q-1)} \Gamma(\rho \rightarrow e^+ e^-)}{1 + \frac{d\Gamma_\rho}{m_\rho}} = \frac{3 m_\rho^{2q}}{4 m_{K^*}^{2q} - m_\rho^{2q}} 3(m_\Phi^{2(p+q-1)} \Gamma(\Phi \rightarrow e^+ e^-) + m_\omega^{2(p+q-1)} \Gamma(\omega \rightarrow e^+ e^-)) \quad (V.15)$$

Nous obtenons alors les différents modèles avec $p = 0, 1, 2$ et $q = \pm 1$.

θ prend deux valeurs θ_m et θ_{inv} définis par

$$4 m_{K^*}^2 - m_\rho^2 = 3(m_\Phi^2 \cos^2 \theta_m + m_\omega^2 \sin^2 \theta_m) \quad (V.16)$$

$$\frac{4}{m_{K^*}^2} - \frac{1}{m_\rho^2} = 3\left(\frac{\cos^2 \theta_{inv}}{m_\Phi^2} + \frac{\sin^2 \theta_{inv}}{m_\omega^2}\right) \quad (V.17)$$

- Modèle A : $p = 0$ Π^{-1} est invariant par SU(3)

$$f_\rho^2 = f_{K^*}^2 = \frac{4f_Y^2}{3} \quad \theta_Y = \theta_B = \theta.$$

On retrouve le modèle de SUGAWARA^[6] avec $\theta = \theta_m$.

- Modèle B : $p = 1$ S est invariant par SU(3)

avec $\theta = \theta_m$, on retrouve le modèle de DAS-MATHUR-OKUBO^[3] ;

avec $\theta = \theta_{inv}$, on retrouve le modèle de OAKES-SAKURAI^[4].

Ce type de modèle a également été étudié par KIMEL^[31], GASIOROWICZ et GEFFEN^[32] et KANG^[33] en faisant en plus des hypothèses sur la symétrie nonet

- Modèle C: $p = 2$ D est invariant par $SU(3)$

Ceci correspond au modèle I discuté par GOURDIN^[8]

4 - Résultats numériques

En utilisant

$$\begin{aligned} m_{\rho} &= 770 \text{ MeV} & m_{K^*} &= 891,5 \text{ MeV} \\ m_{\omega} &= 783,5 \text{ MeV} & m_{\phi} &= 1019,5 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (V.18)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta_m &= 0,843 & \theta_m &= 40,2^\circ \\ \text{tg } \theta_{\text{inv}} &= 0,545 & \theta_{\text{inv}} &= 28,6^\circ \end{aligned} \quad (V.19)$$

Les résultats sont donnés dans le tableau I. Ils montrent donc que le modèle $A(a)$ (SUGAWARA) est favorisé par les résultats expérimentaux. On ne peut cependant pas rejeter pour le moment le modèle $B(a)$ (DAS-MATHUR-OKUBO).

5 - Discussion du modèle $A(a)$ (SUGAWARA)

(a) Nous avons montré dans la partie II comment introduire le courant baryonique de façon compatible avec le modèle "mass mixing". L'identité de Jacobi nous a en effet montré que l'introduction de mixing dans S ($S_{08} \neq 0$) entraîne l'existence de mixing aussi dans P_{abc} . (Si b ou c sont nuls, P_{abc} n'est pas nécessairement nul). Ceci résout l'inconsistance remarquée par KIMEL^{[9][10]} (s'il n'y a pas de mixing dans P_{abc} alors $S_{08} \neq 0$ entraîne aussi $S_{03}, S_{07} \dots \neq 0$, c'est-à-dire l'existence de mélange fort $\omega - \rho$, $\omega - K^*$ en plus de $\omega - \phi$).

Expérience	Modèle A		Modèle B		Modèle C	
	(a)	(b)	(a)	(b)	(a)	(b)
$tg \theta_Y$	$tg \theta_m$	$tg \theta_{inv.}$	$\frac{m}{m} \frac{\Phi}{\omega} tg \theta_m$	$\frac{m}{m} \frac{\Phi}{\omega} tg \theta_{inv.}$	$\frac{m^2}{m} \frac{\Phi}{2} tg \theta_m$	$\frac{m^2}{m} \frac{\Phi}{2} tg \theta_{inv.}$
0,863 ± 0,108	0,843	0,545	1,098	0,709	1,428	0,923
$\frac{4f_Y^2}{3f_p^2}$	1	1	$\frac{m}{m} \frac{\Phi}{2} \frac{1 + tg^2 \theta_m}{1 + tg^2 \theta_Y}$	$\frac{m}{m} \frac{\Phi}{2} \frac{1 + tg^2 \theta_{inv.}}{1 + tg^2 \theta_Y}$	$\frac{m}{m} \frac{\Phi}{4} \frac{1 + tg^2 \theta_m}{1 + tg^2 \theta_Y}$	$\frac{m}{m} \frac{\Phi}{4} \frac{1 + tg^2 \theta_{inv.}}{1 + tg^2 \theta_Y}$
1,06 ± 0,18	1	1	1,36	1,52	1,73	2,16

TABEAU I

(b) Contribution du méson χ

Expérimentalement l'existence du méson χ est assez controversée. Cependant même s'il existe, F_χ est du 1er ordre dans la cassure de SU(3) et donc la contribution au terme de Schwinger du 2ème ordre. Nous allons d'ailleurs donner une borne supérieure à F_χ dans le cadre du modèle de SUGAWARA compte tenu des résultats expérimentaux. Les règles de somme s'écrivent :

$$\int \left(\frac{\rho_1^{\alpha\beta}(m^2)}{m^2} + \rho_0^{\alpha\beta}(m^2) \right) dm^2 = S_{\alpha\beta} \quad (V.20)$$

$$\int \rho_1^{\alpha\beta}(m^2) dm^2 = (S \Pi_0 S)_{\alpha\beta} \quad (V.21)$$

avec

$$S = S_0 + \epsilon S_8$$

F_χ est défini par

$$\langle 0 | v_\mu^{\Delta S}(0) | \chi \rangle = F_\chi \rho_\mu \quad (V.22)$$

où ρ_μ est le quadrivecteur impulsion de χ .

Remarquons qu'on ne peut appliquer l'hypothèse P.C.V.C. forte car ici $P_{abc} \neq F_{abc}$ (voir II.2(c)).

Il est facile de voir que les règles de sommes donnent :

$$\frac{4f_Y^2}{3} = f_\rho^2 \quad (V.23)$$

$$\text{tg } \theta_Y = \text{tg } \theta_B = \text{tg } \theta \quad (V.24)$$

$$\frac{f_{K^*}^2}{f_\rho^2} = \left(1 + \frac{f_{K^*}^2 F_\chi^2}{m_{K^*}^2} \right) \quad (V.25)$$

$$\frac{\frac{4m_{K^*}^2}{f_{K^*}^2} F_\chi^2}{1 + \frac{F_\chi^2}{m_{K^*}^2}} - m_\rho^2 = 3(m_\phi^2 \cos^2 \theta + m_\omega^2 \sin^2 \theta) \quad (V.26)$$

Ainsi la seule modification due au χ est un changement de l'angle θ , on a

$$|\operatorname{tg} \theta| < |\operatorname{tg} \theta_m| \quad (\text{V.27})$$

en utilisant le résultat expérimental

$$|\operatorname{tg} \theta| > 0,755$$

On obtient aisément

$$\frac{f_{K^*}^2 F_\chi^2}{m_{K^*}^2} \leq 0,021$$

d'où

$$\frac{F_\chi}{m_{K^*}} \leq 2,4 \%$$

ou

$$F_\chi \leq 21,4 \text{ MeV}$$

(c) Nous pouvons également exprimer les résultats obtenus (en négligeant la contribution du χ) en terme de symétrie asymptotique. Nous avons ici

$$\int \frac{\rho_1^{\alpha\beta}(m^2) dm^2}{m^4} = (\Pi_0^{-1})_{\alpha\beta} \text{ invariant par SU(3)}$$

En utilisant I.9 il est facile de voir que nous n'avons plus invariance SU(3) de $\Delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(k)$ pour $k \rightarrow \infty$ mais pour $k^2 = 0$ et $k \rightarrow \infty$.

Pour $\Delta_{\mu\nu}^{33}(k)$ et $\Delta_{\mu\nu}^{88}(k)$ ceci correspond à l'invariance SU(3) de la renormalisation de la charge électrique par les interactions fortes.

Si nous adoptons maintenant le point de vue de DAS-MATHUR-OKUBO^[3] pour obtenir des règles de superconvergence d'ordre plus élevé qui est de tenir alors compte de la violation de SU(3) au même ordre on obtient que $\int \rho_1^{\alpha\beta}/m^2 dm^2$ vérifie une formule du type G M-O et on retrouve les résultats précédents.

REFERENCES

- 1 J.J. SAKURAI, Ann. of Phys. 11 (1960) 1 ;
M. GELL MANN et F. ZACHARIASEN, Phys. Rev. 124 (1961) 953 ;
M. GELL MANN, D. SHARP et W.A. WAGNER, Phys. Rev. Letters 8 (1962) 261.
- 2 N.M. KROLL, T.D. LEE et B. ZUMINO, Phys. Rev. 157 (1967) 1376.
- 3 T. DAS, V.S. MATHUR et S. OKUBO, Phys. Rev. Letters 19 (1967) 470.
- 4 R.J. OAKES et J.J. SAKURAI, Phys. Rev. Letters 19 (1967) 1266.
- 5 M. GELL MANN, Physics 1 (1964) 63.
- 6 H. SUGAWARA, Phys. Rev. Letters 21 (1968) 772.
- 7 J.E. AUGUSTIN et al., Phys. Letters 28B (1969) 503.
- 8 M. GOURDIN, pretirage Orsay TH.69/12 (1969),
VIII. Internationale Universitätswochen für Kernphysik, Schladming
(Fév. 1969)
IVe Rencontre de Moriond sur les Interactions Electromagnétiques
(Mars 1969)
Notes of Lectures delivered at the Institute for Theoretical Physics,
Boulder (Juil. 1969).
- 9 I. KIMEL, pretirage EFI 68-70 (1968).
- 10 I. KIMEL, pretirage EFI 68-93 (1968).
- 11 S. WEINBERG, Phys. Rev. Letters 18 (1967) 507.
- 12 T.D. LEE, S. WEINBERG et B. ZUMINO, Phys. Rev. Letters 18 (1967) 1029.
- 13 G. KALLEN, Helv. Phys. Acta 25 (1952) 417.
- 14 H. LEHMANN, Nuovo Cimento 11 (1954) 342.
- 15 K. JOHNSON, Nucl. Phys. 25 (1961) 431.
- 16 S. OKUBO, Nuovo Cimento 44A (1966) 1015.
- 17 T. GOTO et T. IMAMURA, Prog. Theor. Phys. 14 (1955) 396.
- 18 R. GATTO, Nuovo Cimento 28 (1963) 658.
- 19 G.J. GOUNARIS et J.J. SAKURAI, Phys. Rev. Letters 21 (1968) 244.
- 20 G.J. GOUNARIS, pretirage EFI 68-86 (1968).
- 21 D.J. GROSS et R. JACKIW, Phys. Rev. 163 (1967) 1688.
- 22 R. JACKIW, Phys. Rev. 175 (1968) 2058.
- 23 T.K. KUO et SUGAWARA, Phys. Rev. 163 (1967) 1716.
- 24 R. JACKIW, Phys. letters 27B (1968) 96.
- 25 T.D. LEE et B. ZUMINO, Phys. Rev. 163 (1967) 1667.

- 26 H. SUGAWARA, Phys. Rev. 170 (1968) 1659.
- 27 D.J. GROSS et M.B. HALPERN, Phys. Rev. 179 (1969) 1436.
- 28 K. BARDAKCI, Y. FRISHMAN et M.B. HALPERN, Phys. Rev. 170 (1969) 1353.
- 29 J. SCHWINGER, Phys. Rev. 130 (1963) 406 ; Phys. Rev. 130 (1963) 800.
- 30 J.J. SAKURAI, Phys. Rev. Letters 19 (1967) 803.
- 31 I. KIMEL, Phys. Rev. Letters 29 (1968) 177.
- 32 S. GASIOROWICZ et D.A. GEFFEN, pretirage DESY 69/13 (1969).
- 33 K. KANG, Phys. Rev. 177 (1969) 2439.

RADIATIVE VECTOR AND PSEUDOSCALAR MESON DECAYS. APPLICATION TO THE $e^+e^- \rightarrow \eta, \gamma$ REACTION[‡]

E. CREMMER

*Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies.
Orsay, France**

Received 13 June 1969

Abstract: The radiative vector and pseudoscalar meson decay widths are calculated using vector-meson dominance model. SU(3) symmetry and taking into account $\omega - \Phi$ and $\eta - X_0$ mixings. The results are applied to the calculation of the cross section for the annihilation $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$.

1. INTRODUCTION AND SUMMARY

In a recent paper with Gourdin [1] (hereafter referred to as I) we have given a systematic analysis of the process $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma$ in the one-photon exchange approximation and concluded that similar considerations can be made for the process $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$ by describing the electromagnetic vertex γ virtual γ real η real by a form factor $G_\eta(s)$ which is identified at $s=0$ with the coupling constant of the decay $\eta \rightarrow 2\gamma$.

In the present experimental situation, in order to calculate the cross section $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$ it is necessary to use a model which predicts the decay widths of vector mesons in $\eta\gamma$. The two main hypotheses usually used or discussed are a) the vector-meson dominance [2]; b) the SU(3) symmetry.

To use a) it is necessary to know coupling constants $V-\gamma$. Recent e^+e^- annihilation experiments [3] have given available data for the decays $V \rightarrow e^+e^-$ and seem to show that a mass-mixing model ($\theta_V = \theta_B = \theta_M$) with SU(3) symmetric coupling constants ($f_\rho = 2f_Y/\sqrt{3}$) (see refs. [4-6]) is the most favoured by these experimental results.

The situation for b) is however much less clear. A trivial application of SU(3) predicts [7] that the decay amplitude $M(\eta \rightarrow 2\gamma)$ is $\sqrt{3}$ times smaller than $M(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)$ and therefore gives $\Gamma(\eta \rightarrow 2\gamma)/\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = 22.3$ instead of 135^{+85}_{-56} deduced from experiment [8]. Then several authors have proposed

[‡] In partial fulfillment of the requirements for the degree of Docteur d'état es Sciences Physiques. Faculté des Sciences d'Orsay, Université de Paris.

* Laboratoire associé au C.N.R.S. Postal address: Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Bâtiment 211, Faculté des Sciences, 91-Orsay (France).

26	H. SU
27	D.J.
28	K. BA
29	J. SC
30	J.J.
31	I. KI
32	S. GA
33	K. KA

various assumptions for removing this discrepancy and in particular have shown the importance of η - X_0 mixing [9-11].

The present paper is devoted to the systematic use of the two hypotheses (a) and b), taking into account the ω - Φ and η - X_0 mixings.

In sect. 2 we discuss the implications of assumption a) for the P - V - γ and P - γ - γ coupling constants, and show in particular that the mass-mixing model implies that $g_{\eta\gamma\gamma}$ and $g_{X_0\gamma\gamma}$ do not depend on ω - Φ mixing angle.

Sect. 3 is devoted to the consequences of $SU(3)$ symmetry broken only by mixing and phase-space factors. We show that all coupling constants can be written in terms of three constants which can be deduced from the experimental widths of $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ and $\eta \rightarrow 2\gamma$.

We present our predictions in sect. 4 and show that they are consistent with the present experimental results which are essentially upper limits for rare decay widths. We also test our model by calculating the decay width of $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$, our prediction is in good agreement with experiment.

In sect. 5, we apply the results of the preceding sections to the calculation of the cross section of the annihilation $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$. It is shown that the ω - ρ interference is very important ($\approx 45\%$). In the ω - ρ region, the cross section is small compared to that of $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma$ ($\approx \frac{1}{50}$). The cross sections for $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$ and $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma$ have the same order of magnitude in the Φ region.

2. VECTOR-DOMINANCE MODEL

2.1. ρ -meson width and vector-dominance model

Recently, methods to take into account the width of the ρ -meson on vector-dominance model prediction were suggested by Sakurai and Gounaris [12, 16]. Their conclusion is that one can treat the ρ -meson as if it were stable with the following modifications.

(i) For the $g_{\mu\nu}$ part of the ρ -meson propagator, we use

$$R(s) = \frac{1}{m_\rho^2} F_\pi(s) ,$$

where $F_\pi(s)$ is the pion form factor as given, for example in ref. [12].

(ii) The renormalized field of the ρ -meson satisfies

$$\langle 0 | \rho_\mu^3(0) | \rho \rangle = \left(1 + \frac{d\Gamma_\rho}{m_\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_\mu ,$$

where d is model dependent and $d = 0.48$ in ref. [12].

Now, with these prescriptions if we define by $-m_\rho^2/f_\rho$ the γ - ρ coupling constant, we have

$$\langle 0 | V_\mu^3(0) | \rho^0 \rangle = -\frac{m_\rho^2}{f_\rho} \epsilon_\mu \quad (1)$$

with

26 H. SU
 27 D.J.
 28 K. BA
 29 J. SC
 30 J.J.
 31 I. KI
 32 S. GA
 33 K. KA

54

E. CREMMER

$$\bar{f}_\rho = f_\rho \left(1 + \frac{d\Gamma_\rho}{m_\rho}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1')$$

and the coupling constant $g_{\rho F}$, where F is an arbitrary state, is related to the effective coupling constant $\bar{g}_{\rho F}$ used in the calculation of decay rates by

$$\bar{g}_{\rho F} = g_{\rho F} \left(1 + \frac{d\Gamma_\rho}{m_\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

in particular, we have $\bar{g}_{\rho\pi\pi} = g_{\rho\pi\pi} (1 + d\Gamma_\rho/m_\rho)^{\frac{1}{2}}$ and $g_{\rho\pi\pi} = f_\rho$ or the corresponding relation

$$\frac{\Gamma(\rho \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma(\rho \rightarrow \pi^+\pi^-)} = \frac{1}{36} \alpha^2 \left(1 - \frac{4m_\pi^2}{m_\rho^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{m_\rho^2}{\Gamma_\rho^2} \left(1 + \frac{d\Gamma_\rho}{m_\rho}\right)^2.$$

2.2. γ -V coupling constant

Now, we define

$$\langle 0 | V_\mu^8(0) | \Phi \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{3} \frac{m_\Phi^2 \cos \theta_Y}{f_Y} \epsilon_\mu; \quad \langle 0 | V_\mu^8(0) | \omega \rangle = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \frac{m_\omega^2 \sin \theta_Y}{f_Y} \epsilon_\mu \quad (3)$$

the γ -V coupling constants are related to partial decay $V \rightarrow e^+e^-$ by

$$\Gamma(V \rightarrow e^+e^-) = \frac{4}{3} \pi \alpha^2 \frac{m_V}{\bar{f}_V^2}, \quad (4)$$

where $\bar{f}_V$ has been previously defined for the ρ meson and $\bar{f}_V = f_V$ for the ω and Φ mesons. We use the SU(3) symmetric model with θ_Y as given by the Gell-Mann-Okubo mass formula which is in good agreement with experiment [3]

$$\frac{f_Y^2}{4\pi} = 1.58 \pm 0.18, \quad \frac{f_\rho^2}{4\pi} = 2.11 \pm 0.24, \quad \text{tg } \theta_Y = 0.836, \quad (f_\rho^2 = \frac{4}{3} f_Y^2). \quad (5)$$

2.3. ω - Φ and η - X_0 mixings and P-V-V coupling constants

We define the physical states as linear superpositions of pure singlet and octet states by

$$\omega = \cos \theta \omega_1 + \sin \theta \omega_8, \quad \Phi = \sin \theta \omega_1 - \cos \theta \omega_8, \quad (6)$$

with $\text{tg } \theta = 0.836$.

$$\eta = \cos \beta \eta_1 + \sin \beta \eta_8, \quad X_0 = -\sin \beta \eta_1 + \cos \beta \eta_8, \quad (7)$$

with $\text{tg } \beta = 5.05$.

Now, we can write the P-V-V coupling constants in terms of pure SU(3) coupling constants: $g_{\pi\rho\omega_1}$; $g_{\pi\rho\omega_8}$; $g_{\eta_8\omega_8\omega_8}$; $g_{\eta_8\omega_1\omega_8}$; $g_{\eta_8\omega_1\omega_1}$; $g_{\eta_1\omega_8\omega_8}$; $g_{\eta_1\omega_1\omega_8}$ and $g_{\eta_1\omega_1\omega_1}$.

2.4. P-V- γ vertex

According to the vector-dominance model, the photon is emitted via a vector meson as shown on fig. 1, and the coupling constant $f_{PV\gamma}$ is given, for a real photon, by

$$f_{PV\gamma} = - \sum_{V'} \frac{g_{PVV'}}{f_{V'}}. \quad (8)$$

This relation is also valid for the ρ meson because $F_\pi(0) = 1$. The hypothesis $\theta = \theta_Y$ shows that we can again write $f_{PV\gamma}$ in terms of pure SU(3) coupling constants $f_{\pi\rho\gamma}$; $f_{\pi\omega_1\gamma}$; $f_{\pi\omega_8\gamma}$; ... independent of the mixing angle θ .

The coupling constants are related to partial decay of V and P by

$$\begin{aligned} \Gamma(V \rightarrow P\gamma) &= \frac{1}{24} \alpha \frac{f_{VP\gamma}^2}{m_0^2} m_V^3 \left(1 - \frac{m_P^2}{m_V^2}\right)^3, \\ \Gamma(P \rightarrow V\gamma) &= \frac{1}{8} \alpha \frac{f_{VP\gamma}^2}{m_0^2} m_P^2 \left(1 - \frac{m_P^2}{m_P^2}\right)^3, \end{aligned} \quad (9)$$

where m_0 is the mass of the neutral pion ($f_{VP\gamma}$ is dimensionless and is defined as in I).

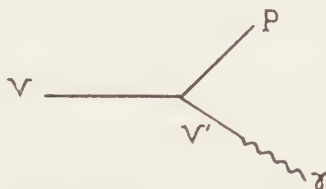


Fig. 1. V-P- γ vertex in the vector-meson dominance model.

2.5. P- γ - γ vertex

The two photons are emitted as shown on fig. 2 and $g_{P\gamma\gamma}$ is related to $f_{PV\gamma}$ by*

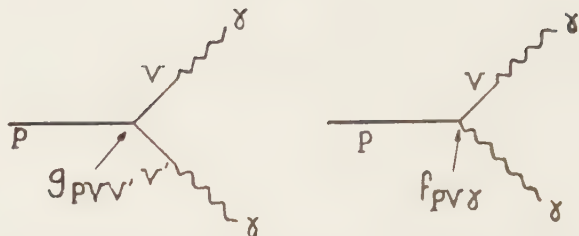
$$g_{P\gamma\gamma} = - \sum_V \frac{f_{PV\gamma}}{f_V}. \quad (10)$$

* We can see that this relation between $g_{P\gamma\gamma}$ and $g_{PV\gamma}$ for $V = \rho$ is the same as that used in I from the total cross section at $s = m_\rho^2$. In I, eq. (15), we have $\frac{1}{2}g_{\pi\gamma\gamma} = \bar{g}_{\rho\pi\gamma}/\bar{g}_{\rho\pi\pi}$, and here $\bar{g}_{\rho\pi\gamma} = g_{\rho\pi\gamma} (1 + d\Gamma_\rho/m_\rho)^{\frac{1}{2}}$; $\bar{g}_{\rho\pi\pi} = f_\rho (1 + d\Gamma_\rho/m_\rho)^{\frac{1}{2}}$, hence $\bar{g}_{\rho\pi\gamma}/\bar{g}_{\rho\pi\pi} = g_{\rho\pi\gamma}/f_\rho$.

26 H. SU
 27 D.J.
 28 K. BA
 29 J. SC
 30 J.J.
 31 I. KI
 32 S. GA
 33 K. KA

56

E. CREMMER

Fig. 2. P - γ - γ vertex in the vector-meson dominance model.

We then obtain

$$\begin{aligned}
 g_{\pi\gamma\gamma} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g_{\pi\rho\omega_8}}{f_\rho^2}, \\
 g_{\eta 8\gamma\gamma} &= \frac{g_{\eta 8\rho\rho}}{f_\rho^2} + \frac{g_{\eta 8\omega_8\omega_8}}{3f_\rho^2}, \\
 g_{\eta 1\gamma\gamma} &= \frac{g_{\eta 1\rho\rho}}{f_\rho^2} + \frac{g_{\eta 1\omega_8\omega_8}}{3f_\rho^2}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Therefore, $g_{V\gamma\gamma}$ is independent of the ω - Φ mixing angle if $\theta = \theta_Y$.

We also remark that the relation used in I

$$\frac{f_{\rho\pi\gamma}}{f_\rho} = \frac{f_{\omega\pi\gamma}}{f_\omega} + \frac{f_{\Phi\pi\gamma}}{f_\Phi} = -\frac{1}{2} g_{\pi\gamma\gamma} \tag{12}$$

is automatically satisfied in the vector-meson dominance model. The coupling constant $g_{P\gamma\gamma}$ is related to the partial decay of P into 2γ by

$$\Gamma(P \rightarrow 2\gamma) = \frac{1}{4} \pi \alpha^2 m_0 \left(\frac{m_P}{m_0} \right)^3 g_{P\gamma\gamma}^2. \tag{13}$$

3. SU(3) SYMMETRY MODEL

We now assume that the coupling constants $g_{PVV'}$ are SU(3) symmetric when P and V are pure SU(3) states. We then have the following relations

$$\begin{aligned}
 g_{\pi\rho\omega_8} &= g_{\eta 8\rho\rho} = -g_{\eta 8\omega_8\omega_8}, \\
 g_{\eta 1\omega_8\omega_8} &= g_{\eta 1\rho\rho}, \\
 g_{\pi\rho\omega_1} &= g_{\eta 8\omega_8\omega_1}, \quad g_{\eta 1\omega_1\omega_8} = 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Defining

$$A \equiv f_{\pi\rho\gamma} = -\frac{g_{\pi\rho\omega_8}}{\sqrt{3}f_\rho}, \quad B \equiv f_{\eta_1\rho\gamma} = -\frac{g_{\eta_1\rho\rho}}{f_\rho}, \quad C \equiv f_{\pi\omega_1\gamma} = -\frac{g_{\pi\rho\omega_1}}{f_\rho}$$

we are able to write all the $f_{PV\gamma}$ coupling constants in terms of A , B and C by:

$$\begin{aligned} f_{\pi\rho\gamma} &= A, & f_{\pi\omega\gamma} &= C \cos\theta + A\sqrt{3} \sin\theta, & f_{\pi\Phi\gamma} &= C \sin\theta - A\sqrt{3} \cos\theta, \\ f_{\eta\rho\gamma} &= B \cos\beta + A\sqrt{3} \sin\beta, & f_{X\rho\gamma} &= -B \sin\beta + A\sqrt{3} \cos\beta, \\ f_{\eta\omega\gamma} &= \cos\beta \sin\theta \frac{B}{\sqrt{3}} + \sin\beta \left(\cos\theta \frac{C}{\sqrt{3}} - A \sin\theta \right), \\ f_{X\omega\gamma} &= -\sin\beta \sin\theta \frac{B}{\sqrt{3}} + \cos\beta \left(\cos\theta \frac{C}{\sqrt{3}} - A \sin\theta \right), \\ f_{\eta\Phi\gamma} &= -\cos\beta \cos\theta \frac{B}{\sqrt{3}} + \sin\beta \left(\sin\theta \frac{C}{\sqrt{3}} + A \cos\theta \right), \\ f_{X\Phi\gamma} &= \sin\beta \cos\theta \frac{B}{\sqrt{3}} + \cos\beta \left(\sin\theta \frac{C}{\sqrt{3}} + A \cos\theta \right), \end{aligned} \quad (15)$$

and the coupling constants $g_{V\gamma\gamma}$ are given as

$$\begin{aligned} g_{\pi\gamma\gamma} &= -\frac{2A}{f_\rho}, & g_{\eta\gamma\gamma} &= -\frac{2A \sin\beta}{f_\rho \sqrt{3}} - \frac{4B \cos\beta}{3f_\rho} \\ g_{X\gamma\gamma} &= -\frac{2A \cos\beta}{f_\rho \sqrt{3}} + \frac{4B \sin\beta}{3f_\rho}. \end{aligned} \quad (16)$$

From the decay widths $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, $\eta \rightarrow 2\gamma$, $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ we obtain respectively A , B and C .

4. THEORETICAL PREDICTIONS AND COMPARISON WITH EXPERIMENTS

From

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) &= (7.4 \pm 1.5) \text{ eV} \quad \text{we have } A = 0.093 \pm 0.012; \\ \Gamma(\omega \rightarrow \pi^0\gamma) &= (1.16 \pm 0.2) \text{ MeV} \quad \text{we have } C = 0.388 \pm 0.070; \\ \Gamma(\eta \rightarrow 2\gamma) &= (1.0 \pm 0.3) \text{ keV} \quad \text{we have } B = 0.61 \pm \frac{0.41}{0.28}. \end{aligned} \quad (17)$$

26 H. SU
 27 D.J.
 28 K. BA
 29 J. SC
 30 J.J.
 31 I. KI
 32 S. GA
 33 K. KA

58

E. CREMMER

From this result we see that the quark model which verifies in particular SU(3) symmetry is not satisfied since in this model $\tan \theta = 0.707$; $C = A\sqrt{6}$ (refs. [13, 15]) here $C/A\sqrt{6} = 1.70 \pm \begin{smallmatrix} 0.59 \\ -0.46 \end{smallmatrix}$.

Using formulae (9), (13), (15) and (16), and numerical values (17) we obtain the results shown in table 1 in which they are compared with experiment.

Table 1
Theoretical predictions and comparison with experiments.

Reaction	$\Gamma_{\text{theor.}}$	Branching ratio	$\Gamma_{\text{exp}}^{\text{a)}$	Remarks
$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$	7.4 ± 1.5 eV		7.4 ± 1.5 eV	input
$\eta \rightarrow 2\gamma$	1.0 ± 0.3 keV		1.0 ± 0.3 keV	input
$X_0 \rightarrow 2\gamma$	$48 \begin{smallmatrix} +55 \\ -30 \end{smallmatrix}$ keV		< 360 keV	
$\omega \rightarrow \pi^0\gamma$	1.16 ± 0.2 MeV	$(9.7 \pm 3)\%$	1.16 ± 0.2 MeV	input
$\rho \rightarrow \pi^0\gamma$	63 ± 17 keV	$(5.7 \pm 1.9)10^{-4}$	< 400 keV	we have used ref. [3] for Γ_{Vtotal} in branching ratio
$\Phi \rightarrow \pi^0\gamma$	$0.26 \begin{smallmatrix} +0.46 \\ -0.24 \end{smallmatrix}$ MeV	$(6.2 \begin{smallmatrix} +14 \\ -5.8 \end{smallmatrix})\%$	b)	
$\rho \rightarrow \eta\gamma$	$73 \begin{smallmatrix} +80 \\ -48 \end{smallmatrix}$ keV	$(6.6 \begin{smallmatrix} +8.4 \\ -4.6 \end{smallmatrix}) \cdot 10^{-4}$		
$\omega \rightarrow \eta\gamma$	$23 \begin{smallmatrix} +22 \\ -15 \end{smallmatrix}$ keV	$(1.9 \begin{smallmatrix} +2.4 \\ -1.3 \end{smallmatrix}) \cdot 10^{-3}$	< 180 keV	
$\Phi \rightarrow \eta\gamma$	$0.16 \begin{smallmatrix} +0.17 \\ -0.10 \end{smallmatrix}$ MeV	$(3.8 \begin{smallmatrix} +6.8 \\ -2.6 \end{smallmatrix})\%$	< 0.33 MeV	
$\Phi \rightarrow X\gamma$	$2.3 \begin{smallmatrix} +3.7 \\ -1.5 \end{smallmatrix}$ keV	$(5.5 \begin{smallmatrix} +19 \\ -4.9 \end{smallmatrix}) \cdot 10^{-4}$		
$X \rightarrow \rho\gamma$	$0.67 \begin{smallmatrix} +1.28 \\ -0.50 \end{smallmatrix}$ MeV		< 1 MeV	
$X \rightarrow \rho\gamma / X \rightarrow 2\gamma$		$1 \begin{smallmatrix} +5 \\ -4 \end{smallmatrix}$	$1 \begin{smallmatrix} +10 \\ -2 \end{smallmatrix}$	
$X \rightarrow \omega\gamma$	$0.58 \begin{smallmatrix} +1.4 \\ -0.48 \end{smallmatrix}$ MeV			

a) See ref. [8].

b) After completing this work, we received a preprint from DESY by Bemporad et al. [19] in which they give an upper limit for $\Gamma(\Phi \rightarrow \pi^0\gamma)/\Gamma(\Phi \rightarrow \text{all})$ of 0.35% which is smaller than our lower prediction (0.4%).

We conclude this section by some remarks*:

a) The results for $\omega, \rho, \Phi \rightarrow \pi^0\gamma$ are in fact independent of SU(3) symmetry as is shown in I and the small difference with the results of I is due only to the values of f_ω and f_Φ that we have taken here.

* After completing this work, we received a paper by Wiley [18] in which he discusses the problem of using quadratic or linear mass formula for bosons but does not use the vector-dominance model.

b) We can also test our model and the ρ dominance in $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ which is described by the process shown on fig. 3; in this model $\Gamma(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma)$ is given by refs. [10, 14]

$$\Gamma(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma) = \frac{\alpha}{6\pi} \frac{m_\eta^2}{m_\rho^2} f_\eta^2 \frac{f_\rho^2}{4\pi} (11.5 \cdot 10^{-2} \text{ MeV}) , \quad (18)$$

then we have

$$\Gamma(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma)_{\text{th.}} = 110^{+105}_{-55} \text{ eV} , \quad (19)$$

which is in good agreement with the experimental result [8]

$$\Gamma(\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma)_{\text{exp}} = 145 \pm 50 \text{ eV} . \quad (20)$$

We can compare our results with those obtained by Arnowitz et al. [17] using hard meson techniques and a modification of PCAC and neglecting η - X_0 mixing. They use the decay rate of $\omega \rightarrow \pi^0\gamma$ and $\Phi \rightarrow \rho^0\pi^0$ as input. Their results are of the same order of magnitude as ours except for Φ decays. They find

$$\Gamma(\Phi \rightarrow \pi\gamma) = 0.028 \pm 0.011 \text{ MeV instead of } 0.26^{+0.46}_{-0.24} \text{ MeV} ,$$

$$\Gamma(\Phi \rightarrow \eta\gamma) = 0.61 \pm 0.24 \text{ keV instead of } 160^{+170}_{-100} \text{ keV} .$$

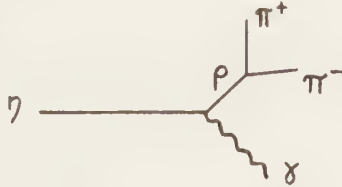


Fig. 3. $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ process in the vector-meson dominance model.

5. APPLICATION TO THE $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$

In this section, we use exactly the same method as in I and we refer the reader to it for all development on the analytic structure of the matrix element $\langle \eta\gamma | T | e^+e^- \rangle$ and on kinematical definitions.

5.1. The $\sqrt{s} \sim 700 - 900 \text{ MeV}$ region

We neglect the Φ contribution and retain only ω and ρ contributions. The total cross section $\sigma(e^+e^- \rightarrow \eta\gamma)$ in the one-photon exchange approximation (fig. 4) is the sum of three terms

26 H. SU
 27 D.J.
 28 K. BA
 29 J. SC
 30 J.J.
 31 I. KI
 32 S. GA
 33 K. KA

60

E. CREMMER



Fig. 4. The one-photon exchange approximation for the $e^+e^- \rightarrow P\gamma$ reaction.

$$\begin{aligned}\sigma^{I=1}(s) &= \frac{1}{3} 2\pi^2 \alpha^3 \frac{1}{m_0^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{s}\right)^3 \left| \frac{f_{\rho\eta\gamma}}{f_\rho} \right|^2 |F_\pi(s)|^2, \\ \sigma^{I=0}(s) &= \frac{1}{3} 2\pi^2 \alpha^3 \frac{1}{m_0^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{s}\right)^3 \left| \frac{f_{\omega\eta\gamma}}{f_\omega} \right|^2 \frac{m_\omega^4}{(m_\omega^2 - s)^2 + m_\omega^2 \Gamma_\omega^2}, \\ \sigma^{\text{int}}(s) &= \frac{1}{3} 2\pi^2 \alpha^3 \frac{1}{m_0^2} \left(1 - \frac{m_\eta^2}{s}\right)^3 \frac{f_{\rho\eta\gamma} f_{\omega\eta\gamma}}{f_\rho f_\omega} |F_\pi(s)|^2 \frac{m_\omega^4}{(m_\omega^2 - s)^2 + m_\omega^2 \Gamma_\omega^2} \\ &\quad \times \frac{\left(1 - \frac{s}{m_\rho^2}\right) \left(1 - \frac{s}{m_\omega^2}\right) + \frac{\Gamma_\rho(s) \Gamma_\omega}{m_\rho m_\omega}}{1 + \frac{d\Gamma_\rho}{m_\rho}},\end{aligned}\quad (21)$$

where $F_\pi(s)$ is given by Gounaris and Sakurai [12].

From the results of the preceding section we have

$$\begin{aligned}f_{\rho\eta\gamma} &= +0.276 + 0.121 \\ &\quad - 0.095, \\ f_{\omega\eta\gamma} &= +0.153 + 0.068 \\ &\quad - 0.058,\end{aligned}\quad (22)$$

hence the interference term $\sigma^{\text{int}}(s)$ is > 0 . Fig. 5 shows the total cross section $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$ with and without the interference term for $f_{\rho\eta\gamma} = 0.276$ and $f_{\omega\eta\gamma} = 0.153$.

We give below the values of the different terms at the peak $s = m_\omega^2$.

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{tot}} &= 8.4 \text{ nb}, \\ \sigma^{I=0} &= 3.7 \text{ nb}, \\ \sigma^{I=1} &= 1.0 \text{ nb}, \\ \sigma^{\text{int}} &= 3.7 \text{ nb}.\end{aligned}\quad (23)$$

Then the interference is very important $\simeq 45\%$.

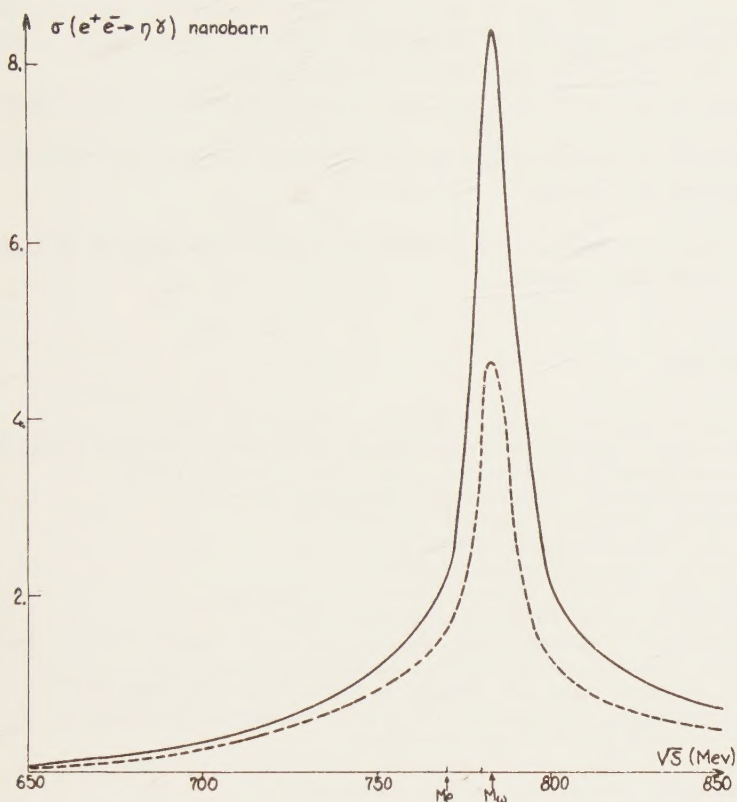


Fig. 5. Total cross section $e^+e^- \rightarrow \eta\gamma$ in the 650 - 850 MeV. The solid line represents the complete total cross section; the dotted line represents the sum $\sigma_{I=0} + \sigma_{I=1}$ without the interference term.

We see from these results that, if our model is correct, it is very difficult to obtain information on $f_{\rho\eta\gamma}$ and $f_{\omega\eta\gamma}$ from e^+e^- experiments because

- (i) of the interference $\omega - \rho$;
- (ii) of the smallness of $\sigma(e^+e^- \rightarrow \eta\gamma)$ which is of the order of $\frac{1}{50} \sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma)$.

5.2. The $\sqrt{s} \approx 1010 - 1020$ MeV region

We retain only the Φ contribution and at the peak $s = m_\Phi^2$ we have

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \eta\gamma) = \frac{12\pi}{m_\Phi^2} \frac{\Gamma(\Phi \rightarrow \eta\gamma)}{\Gamma_\Phi} \frac{\Gamma(\Phi \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma_\Phi}. \quad (24)$$

Then, using previous results, we have

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \eta\gamma) \approx 0.21^{+0.22}_{-0.13} \mu\text{b}. \quad (25)$$

26 H. SU
 27 D.J.
 28 K. BA
 29 J. SC
 30 J.J.
 31 I. KI
 32 S. GA
 33 K. KA

62

E. CREMMER

The situation is better than in the ω - ρ region, but there remains the problem of separating events with η and those with π^0 . Here $\sigma(e^+e^- \rightarrow \eta\gamma)$ and $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma)$ are of the same order of magnitude.

The case of X_0 is not interesting because of the small phase space available in the region of Φ : $\Gamma(\Phi \rightarrow X\gamma)/\Gamma(\Phi \rightarrow \eta\gamma) \simeq 1.5\%$.

The numerical computations have been made on UNIVAC 1108 at the Faculté des Sciences, Orsay.

It is a pleasure to thank Professor M. Gourdin for suggesting this work and very useful discussions.

REFERENCES

- [1] E. Cremmer and M. Gourdin, Nucl. Phys. B10 (1969) 179.
- [2] M. Gell-Mann, D. Sharp and W. A. Wagner, Phys. Rev. Letters 8 (1962) 261;
M. Gell-Mann and F. Zachariasen, Phys. Rev. 124 (1961) 953.
- [3] J. E. Augustin et al., Phys. Letters 28B (1969) 503.
- [4] H. Sugarawa, Phys. Rev. Letters 21 (1968) 772.
- [5] M. Gourdin, Orsay preprint TH 69/12.
- [6] E. Cremmer, Orsay preprint TH 69/26.
- [7] N. Cabibbo and R. Gatto, Nuovo Cimento 21 (1961) 872.
- [8] Particle Data Group, UCRL 8030 (August 1968).
- [9] R. H. Dalitz and D. G. Sutherland, Nuovo Cimento 37 (1965) 1777.
- [10] A. Baracca and A. Bramon, Nuovo Cimento 51A (1967) 873.
- [11] A. Kanazawa and T. Sakuma, Progr. in Theor. Phys. 39 (1968) 696.
- [12] G. J. Gounaris and J. J. Sakurai, Phys. Rev. Letters 21 (1968) 244.
- [13] G. Zweig, CERN preprint TH. 412 (1964);
F. Gursey, T. D. Lee and M. Nauenberg, Phys. Rev. 135 (1964) B467.
- [14] G. J. Gounaris, Nuovo Cimento 53A (1968) 565.
- [15] T. Kitazoe and T. Teshima, Nuovo Cimento 57A (1968) 497.
- [16] G. J. Gounaris, Chicago preprint EFI 68-86 (1968).
- [17] R. Arnowitt, M. H. Friedmann and P. Nath, Phys. Letters 27B (1968) 657.
- [18] R. S. Wiley, Pittsburgh preprint NYO-3829-30 (1969).
- [19] C. Bemporad et al., DESY preprint 69/15 (1969).

